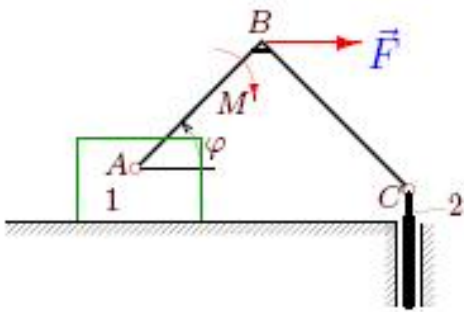


Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

Устюхин М. Н.

3 июля 2009 г.



30.13.

Невесомый изогнутый под прямым углом стержень соединяет груз массой m_1 и поршень массой m_2 , движущийся в вертикальных направляющих. $AB = a$, $BC = b$. Момент M приложен к стержню, горизонтальная сила F - к углу B . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ .

1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (1)$$

Обобщённую силу будем искать как сумму вкладов консервативных и неконсервативных сил. Соответственно,

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \tilde{Q}.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо выразить кинетическую и потенциальную энергии как функции обобщённой координаты и скорости

$$T = T(\dot{\varphi}, \varphi), \quad \Pi = \Pi(\varphi).$$

2 Механическая энергия системы

2.1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}m_1v_A^2 + \frac{1}{2}m_2v_C^2. \quad (2)$$

2.2 Потенциальная энергия

Потенциальная энергия системы равна:

$$\Pi = 0. \quad (3)$$

2.3 Выражение кинетической энергии через обобщённую координату

Выразим линейные скорости через обобщённую координату.

Рассмотрим граф

$$A \xrightarrow{\varphi, a} B$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{Ax} - a\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} = v_{Ay} + a\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases} \quad (4)$$

Откуда

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{Ax} - a\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} = a\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим граф

$$C \xrightarrow{\frac{\pi}{2} + \varphi, b} B$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{Cx} - b\dot{\varphi} \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi), \\ v_{By} = v_{Cy} + b\dot{\varphi} \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi). \end{cases} \quad (6)$$

Откуда

$$\begin{cases} v_{Bx} = -b\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ v_{By} = v_{Cy} - b\dot{\varphi} \sin \varphi. \end{cases} \quad (7)$$

Из этих двух графов следует

$$\begin{cases} v_A = v_{Ax} = a\dot{\varphi} \sin \varphi - b\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ v_C = v_{Cy} = a\dot{\varphi} \cos \varphi + b\dot{\varphi} \sin \varphi. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом выражение для кинетической энергии 2 примет вид:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\varphi}^2(a \sin \varphi - b \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}^2(a \cos \varphi + b \sin \varphi)^2. \quad (9)$$

3 Обобщённая сила

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(-Fv_{Bx} - M\omega_1 - m_2gv_{Cy}). \quad (10)$$

С учетом 7 и 8 получаем

$$Q = Fb \cos \varphi - M - m_2g(a \cos \varphi + b \sin \varphi). \quad (11)$$