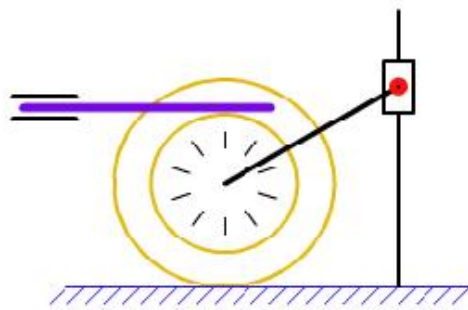


# Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

29 июня 2009 г.



**30.15.** Своим внешним ободом блок (радиусы  $R$  и  $r$ ) катится по горизонтальной поверхности. Муфта, надетая на гладкий вертикальный стержень, соединена с осью блока стержнем  $AB$  длиной  $L$ . Шток, скользящий в горизонтальных направляющих, находится в зацеплении с внутренним радиусом блока. Масса муфты  $m_1$ , блока -  $m_2$ . К штоку приложена горизонтальная сила  $F$ , к блоку — момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (1)$$

Обобщённую силу будем искать как сумму вкладов консервативных и неконсервативных сил. Соответственно,

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \tilde{Q}.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо выразить кинетическую и потенциальную энергии как функции обобщённой координаты и скорости

$$T = T(\dot{\varphi}, \varphi), \quad \Pi = \Pi(\varphi).$$

## 1 Механическая энергия системы

### 1.1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}m_1v_B^2 + \frac{1}{2}m_2v_A^2 + \frac{1}{2}i\omega_2^2. \quad (2)$$

### 1.2 Выражение кинетической энергии через обобщённую координату

Выразим линейные скорости через обобщённую координату.

Рассмотрим граф

$$O \xrightarrow{\frac{\pi}{2}, R} A$$

$$\begin{cases} v_{Ax} = 0 - R\omega_2 \sin \frac{\pi}{2}, \\ v_{Ay} = 0 + R\omega_2 \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Откуда

$$\begin{cases} v_{Ax} = -R\omega_2, \\ v_{Ay} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим граф

$$A \xrightarrow{\varphi, L} B$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = 0 = v_{Ax} - L\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} = 0 + L\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases} \quad (5)$$

Откуда

$$\begin{cases} v_{Ax} = L\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} = L\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом выражение для кинетической энергии 2 примет вид:

$$T = \frac{1}{2}L^2\dot{\varphi}^2(m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi + \frac{i}{R^2} \sin^2 \varphi). \quad (7)$$

## 2 Обобщённая сила

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \tilde{Q} = -m_1 L \cos \varphi + FL \sin \varphi (1 + r/R) + ML \sin \varphi / R. \quad (8)$$