

М. Н. Кирсанов

# **СБОРНИК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ**

**по динамике**

---

Пособие для студентов университетов, изучающих  
теоретическую механику

Москва  
Издательство МЭИ  
2005

УДК 531.3  
ББК 22.213  
К 435

**Кирсанов М. Н.** Сборник экзаменационных задач по динамике: Пособие для студентов университетов, изучающих теоретическую механику/ М.Н. Кирсанов. — М.: Издательство МЭИ, 2005. — 96 с.  
К 435 — ISBN 5-7046-1168-0.

Изложены условия и примеры решения экзаменационных задач по пяти темам теоретической механики. Основное внимание уделено задачам на составление уравнений Лагранжа 2-го рода. Для каждой задачи дано от 30 до 120 вариантов условий. Приведены промежуточные результаты и ответы.

Книга может быть использована как при очной, так и при дистанционной формах обучения.

Для студентов и преподавателей технических вузов.

Ил. 30.

**УДК 531.3**  
**ББК 22.213**

**ISBN 5-7046-1168-0**

© Кирсанов М. Н., 2005

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	4
<b>I. Система с одной степенью свободы . . . . .</b>	<b>5</b>
Условия задач . . . . .	5
Примеры решений . . . . .	30
<b>II. Система с двумя степенями свободы . . . . .</b>	<b>46</b>
Условия задач . . . . .	46
Примеры решений . . . . .	53
<b>III. Колебания системы с двумя степенями свободы . . . . .</b>	<b>63</b>
Условия задач . . . . .	63
Пример решения . . . . .	66
<b>IV. Колебания узла фермы . . . . .</b>	<b>71</b>
Условия задач . . . . .	71
Пример решения . . . . .	75
<b>V. Предельные частоты системы . . . . .</b>	<b>80</b>
Условия задач . . . . .	80
Пример решения . . . . .	84
Ответы . . . . .	87
Библиографический список . . . . .	94

## Предисловие

В сборнике даны экзаменационные задачи по пяти темам динамики курса теоретической механики. Основное внимание уделяется задачам на составление уравнения Лагранжа 2-го рода.

В **задачах 1.1 – 1.120** надо составить уравнение движения системы с одной степенью свободы. Экзаменационный билет в МЭИ(ТУ) по курсу теоретической механики обычно включает в себя такую задачу. В сборнике приведены условия задач и решения девяти наиболее трудных вариантов, включая задачу о моноцикле (с. 44). Для решения используется удобный и наглядный метод кинематических графов [8]. Некоторые задачи включают краткие ответы (кинетическая энергия и обобщенная сила). Четыре аналогичные задачи на составление уравнения Лагранжа разобраны в Решебнике [6].

В **задачах 2.1 – 2.62** предлагаются системы с двумя степенями свободы.

В **задачах 3.1 – 3.30, 4.1 – 4.30** определяются собственные частоты колебаний механических систем. Задача о колебании узла фермы (**задачи 4.1 – 4.30**) является характерной экзаменационной задачей — для ее решения требуется знание статики и динамики.

В **задачах 5.1 – 5.30** помимо собственных частот определяются и предельные. Под предельными частотами понимаются значения собственных частот при неограниченном увеличении масс отдельных тел системы. Если предел собственной частоты, при стремлении некоторой массы к бесконечности равен нулю, то считается, что предельной частоты, соответствующей этой массе нет.

Числовые значения и ответы, данные во всех задачах (кроме **1.1 – 1.120**), рассчитаны на письменный экзамен (два часа) или для самоконтроля при подготовке к экзамену. Для устного экзамена (подготовка один час) эти задачи должны быть решены в общем виде, без упрощений, преобразований и подстановок в окончательный ответ промежуточных и числовых значений.

Автор будет благодарен всем приславшим свои замечания о книге: [prei2004@yandex.ru](mailto:prei2004@yandex.ru) .

# I

## СИСТЕМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

### Условия задач

Во всех задачах сделаны обычные предположения — цилиндры, диски, колеса катятся без проскальзывания и без трения качения, нити нерастяжимы и невесомы. Трение в шарнирах отсутствует. Если не оговорено дополнительно, то направления нитей, стержней, сил и положения плоскостей принимать в зависимости от их изображения вертикальными или горизонтальными. Вопросы отрыва тел от опор не рассматриваются.

Следует помнить также, что движение определяется не только заданными силами, но и начальными условиями. Поэтому всякие сомнения о возможности движения механизма здесь излишни, в задаче не даны ни величины сил, ни массы, ни начальные условия. Во всех задачах только два тела наделены массой, остальные считаются невесомыми. Если не оговорено дополнительно, механизм расположен в вертикальной плоскости.

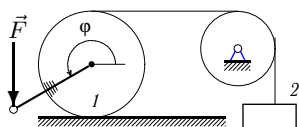
При решении некоторых задач иногда возникает вопрос о некоторых незадаанных в условии величинах, чаще всего кажется, что не задан какой-либо радиус или длина. В таких случаях рекомендуется ввести эту величину, при правильном решении она сократится и в ответ не войдет.

Задачи получены специальной программой-генератором. Для каждого базового условия генератор дает восемь вариантов, отличающихся массами, нагрузками или обобщенными координатами.

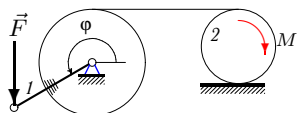
Механизмы данные в задачах используются в цепях автоматического регулирования как клапаны, пусковые или другие служебные устройства. Объединяет их одно свойство — нелинейная зависимость движения от нагрузок. Для механизмов с такими свойствами применение уравнения Лагранжа 2-го рода особенно эффективно.

*В задачах 1.1 – 1.120 составить уравнение движения системы.*

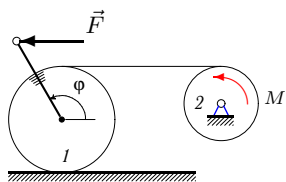
К задачам, помеченным звездочкой \*, ответы даны в табл. 1 на с.87, 88.



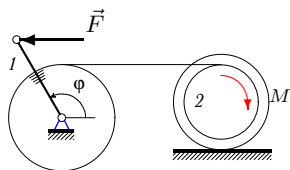
**1.1.** Цилиндр массой  $m_1$  жестко соединен с невесомым стержнем длиной  $a$ , к которому приложена вертикальная сила  $F$ . Радиус цилиндра  $R$ . Нить параллельная основанию, по которому катится цилиндр, связывает его с грузом массой  $m_2$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



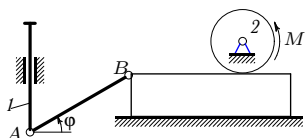
**1.2.\*** Цилиндр жестко соединен с однородным стержнем массой  $m_1$ , длиной  $a$ , к которому приложена вертикальная сила  $F$ . Радиус цилиндра  $R$ . Цилиндр вращается вокруг неподвижной оси и нитью связан с диском массой  $m_2$  и радиусом  $r$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.3.** Цилиндр массой  $m_1$  и радиусом  $R$  жестко соединен с невесомым стержнем длиной  $a$ . Нить, параллельная основанию, по которому катится цилиндр, связывает его с диском массой  $m_2$  и радиусом  $r$ . За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

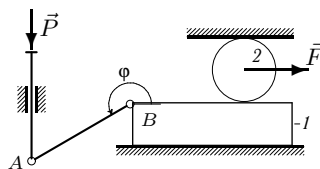


**1.4.** Цилиндр радиусом  $R$  жестко соединен с однородным стержнем массой  $m_1$  и длиной  $a$ . Цилиндр вращается вокруг неподвижной оси и нитью связан с внутренним ободом блока массой  $m_2$ . Радиусы блока  $R_0$  и  $r_0$ , момент инерции  $J_0$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

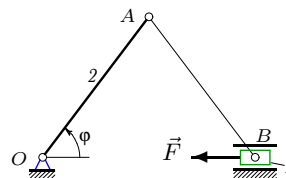


**1.5.\*** Стержень  $AB = a$  соединяет вертикальный поршень массой  $m_1$  и горизонтально движущийся брусок. Брусок вращает цилиндр радиусом  $R$  и массой  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

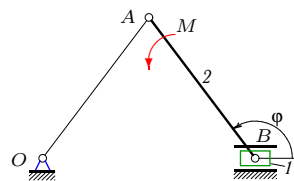
**1.6.** Стержень  $AB = a$  соединяет вертикальный поршень и горизонтально движущийся брусок массой  $m_1$ . Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_2$  катится по бруску и горизонтальной поверхности. К оси цилиндра приложена горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



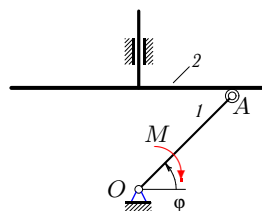
**1.7.\*** Механизм состоит из двух стержней одинаковой длины  $OA = AB = a$  и горизонтально движущегося ползуна  $B$  массой  $m_1$ . К ползуну приложена горизонтальная сила  $F$ . Масса стержня  $OA$  равна  $m_2$ , массой стержня  $AB$  пренебречь. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



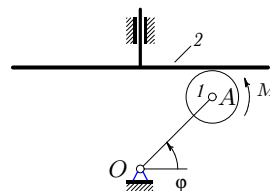
**1.8.** Механизм состоит из двух стержней одинаковой длины  $OA = AB = a$  и горизонтально движущегося ползуна  $B$  массой  $m_1$ . К стержню  $AB$  приложен момент  $M$ . Масса стержня  $AB$  равна  $m_2$ , массой стержня  $OA$  пренебречь. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

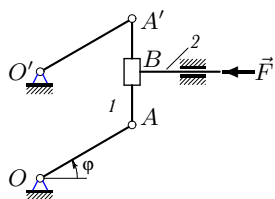


**1.9.** Кривошип  $OA = a$  массой  $m_1$  приводит в движение вертикально движущийся поршень массой  $m_2$ . Колесико  $A$  катается без сопротивления и без отрыва по нижней поверхности поршня. Размерами колесика пренебречь. Момент  $M$  приложен к  $OA$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

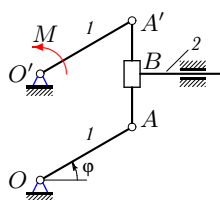


**1.10.\*** Невесомый кривошип  $OA = a$  приводит в движение колесо  $I$  массой  $m_1$  и вертикально движущийся поршень массой  $m_2$ . Колесо  $A$  радиусом  $R$  катается без сопротивления и без отрыва по нижней поверхности поршня. Момент  $M$  приложен к колесу. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

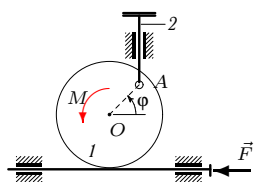




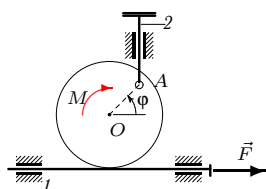
**1.11.** Шарнирный параллелограмм состоит из стержней  $OA$ ,  $A'O'$  и стержня  $AA'$  массой  $m_1$ . К штоку приложена горизонтальная сила  $F$ . Общая масса муфты  $B$  и горизонтально движущегося штока равна  $m_2$ ;  $OA = O'A' = a$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .



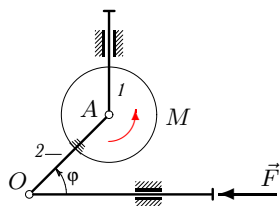
**1.12.** Шарнирный параллелограмм состоит из стержней  $OA$ ,  $A'O'$  массой  $m_1$  каждый и невесомого стержня  $AA'$ . К стержню  $O'A'$  приложен момент  $M$ . Общая масса муфты  $B$  и горизонтально движущегося штока равна  $m_2$ ;  $OA = O'A' = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.13.** Однородный диск  $1$  массой  $m_1$  и радиусом  $R$  шарнирно соединен в точке  $A$  с вертикально движущимся штоком  $2$  массой  $m_2$ . Диск катится по горизонтальному подвижному штоку;  $OA = a$ . За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .



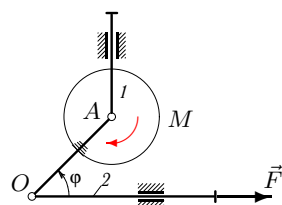
**1.14.** Горизонтальный шток  $1$  массой  $m_1$  приводится в движение невесомым диском радиусом  $R$ , катящимся по штоку. Диск шарнирно соединен в точке  $A$  с вертикально движущимся штоком  $2$  массой  $m_2$ ;  $OA = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



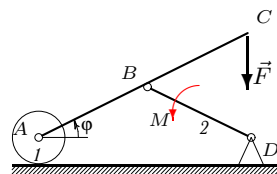
**1.15.** На вертикальном штоке шарнирно закреплен однородный диск  $1$  радиусом  $R$  и массой  $m_1$ . Диск жестко соединен со стержнем  $2$  массой  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ ;  $AO = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



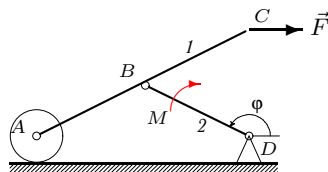
**1.16.** На вертикальном штоке шарнирно закреплен однородный диск  $1$  радиусом  $R$ , массой  $m_1$ . Диск жестко соединен со стержнем  $AO$ . Масса горизонтального штока —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ ;  $AO = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



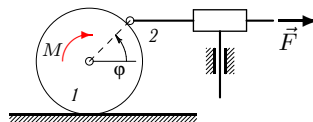
**1.17.\*** Механизм состоит из стержня  $AC$ , цилиндра массой  $m_1$  и кривошипа  $BD$  массой  $m_2$ . Цилиндр катится по горизонтальной плоскости. На стержень действует вертикальная сила  $F$ , на кривошип — момент  $M$ .  $AB = BC = BD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



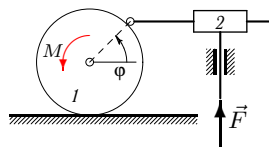
**1.18.** Механизм состоит из стержня  $AC$  массой  $m_1$ , цилиндра и кривошипа  $BD$  массой  $m_2$ . Цилиндр катится по горизонтальной плоскости. На стержень действует горизонтальная сила  $F$ , на кривошип — момент  $M$ ;  $AB = BC = BD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

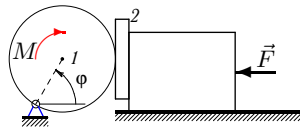
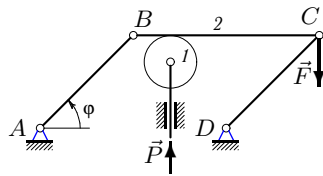
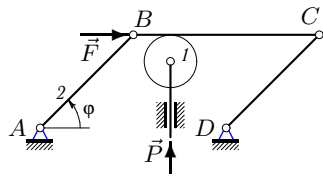
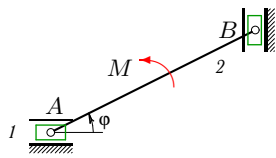
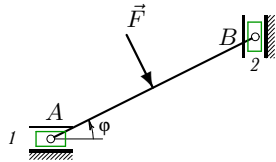


**1.19.\*** Сквозь муфту, закрепленную на вертикальном штоке, скользит горизонтальный стержень, соединенный шарниром с ободом цилиндра. Масса цилиндра  $m_1$ , радиус  $R$ . Масса стержня  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к стержню — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.20.** Сквозь муфту, закрепленную на вертикальном штоке, скользит горизонтальный стержень, соединенный шарниром с ободом цилиндра. Масса цилиндра  $m_1$ , радиус —  $R$ . Масса муфты  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .





**1.21.\*** Горизонтально движущийся ползун  $A$  массой  $m_1$  соединен с вертикально движущимся ползунком  $B$  массой  $m_2$ . Массой стержня  $AB$  пренебречь;  $AB = a$ . К середине стержня приложена сила  $F$ , перпендикулярная стержню. За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$ .

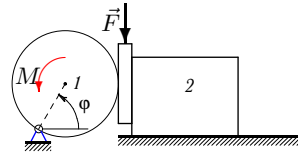
**1.22.** Горизонтально движущийся ползун  $A$  массой  $m_1$  соединен стержнем с вертикально движущимся невесомым ползунком  $B$ . Масса однородного стержня  $AB$  равна  $m_2$ ;  $AB = a$ . К стержню приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.23.** Диск массой  $m_1$  шарнирно закреплен на штоке и катится без проскальзывания по звену  $BC$  шарнирного параллелограмма, расположенного в горизонтальной плоскости. Масса  $AB$  равна  $m_2$ . На шток действует сила  $P$ , на звено  $BC$  — сила  $F$ ;  $AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

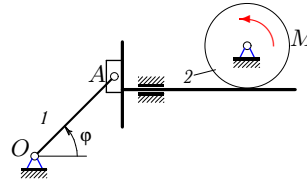
**1.24.** Диск массой  $m_1$  шарнирно закреплен на штоке и катится без проскальзывания по звену  $BC$  шарнирного параллелограмма, расположенного в горизонтальной плоскости;  $AB = a$ . Масса  $BC$  равна  $m_2$ . На шток действует сила  $P$ , на шарнир  $C$  — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.25.\*** Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$ , вращаясь вокруг оси, проходящей через его обод, находится в зацеплении с тонкой пластиной массой  $m_2$ . Другой гранью пластина скользит без сопротивления по вертикальной грани бруска. К цилиндру приложен момент  $M$ , к бруску — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

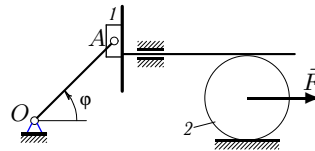
**1.26.** Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$ , вращаясь вокруг оси, проходящей через его обод, находится в зацеплении с тонкой пластиной. Другой гранью пластина скользит без сопротивления по вертикальной грани бруска массой  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — вертикальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



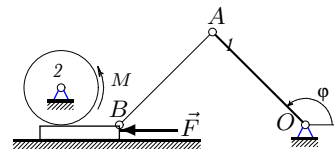
**1.27.** Брусок  $A$ , закрепленный на кривошипе  $OA = a$  массой  $m_1$ , скользит по поверхности горизонтально движущегося поршня. Поршень приводит в движение цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .



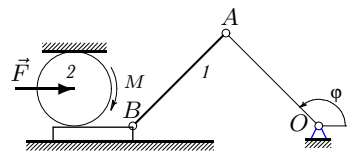
**1.28.** Брусок  $A$  массой  $m_1$ , закрепленный на кривошипе  $OA = a$ , скользит по поверхности горизонтально движущегося поршня. Поршень приводит в движение цилиндр массой  $m_2$ . К оси цилиндра приложена горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

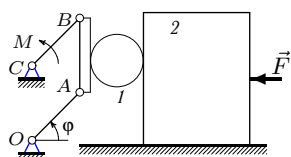


**1.29.** Тонкий брусок скользит по горизонтальной поверхности и приводит в движение цилиндр. Масса кривошипа  $OA$  равна  $m_1$ , масса цилиндра радиусом  $R$  —  $m_2$ . К бруску приложена горизонтальная сила  $F$ ;  $AO = AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

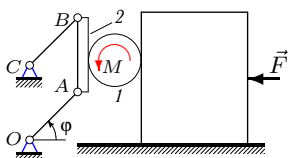


**1.30.** Тонкий брусок скользит по горизонтальной поверхности и приводит в движение цилиндр. Масса шатуна  $AB$  равна  $m_1$ , масса цилиндра радиусом  $R$  —  $m_2$ . К оси цилиндра приложена горизонтальная сила  $F$ ;  $AO = AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

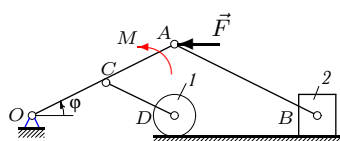




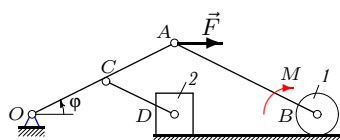
**1.31.** Цилиндр радиусом  $R$  массой  $m_1$  катается по вертикальной поверхности звена  $AB$  шарнирного параллелограмма и боковой грани бруска массой  $m_2$ . К бруску приложена сила  $F$ , к звену  $BC$  — момент  $M$ ;  $AO = BC = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



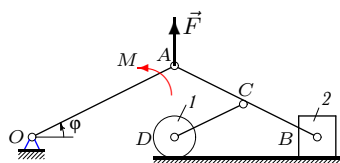
**1.32.** Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$  катается по вертикальной поверхности звена  $AB$  шарнирного параллелограмма и боковой грани бруска. К бруску приложена сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ ;  $AO = BC = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



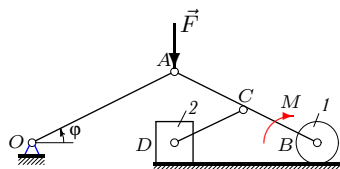
**1.33.** К стержню  $OA$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , бруска —  $m_2$ ;  $AO = AB = 2a$ ,  $AC = CD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.34.** К стержню  $AB$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , бруска —  $m_2$ ;  $AO = AB = 2a$ ,  $AC = CD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

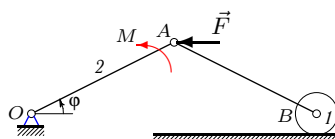


**1.35.** К стержню  $OA$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — вертикальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , бруска —  $m_2$ ;  $AO = AB = 2a$ ,  $AC = CD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

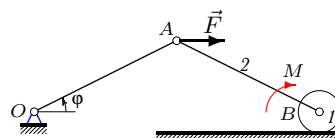


**1.36.** К стержню  $AB$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — вертикальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , бруска —  $m_2$ ;  $AO = AB = 2a$ ,  $AC = CD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

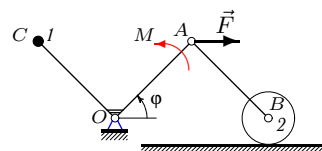
**1.37.** К стержню  $OA$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  – горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , стержня  $OA$  –  $m_2$ ;  $AO = AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



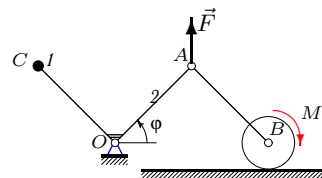
**1.38.** Механизм состоит из двух шарнирно соединенных стержней и цилиндра, катающегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости. К стержню  $AB$  приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  – горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , стержня  $AB$  –  $m_2$ ;  $AO = AB = a$ . За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$  стержня  $OA$ .

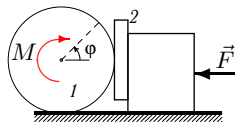
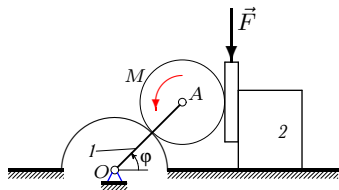
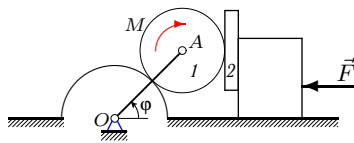
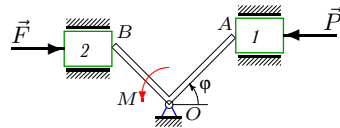
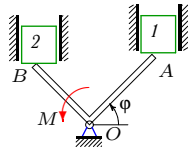


**1.39.** Стержни  $OC$  и  $OA$  жестко скреплены под углом  $90^\circ$ . В точке  $C$  расположена масса  $m_1$ , на оси  $B$  – однородный цилиндр. Масса цилиндра, катящегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости –  $m_2$ . К стержню  $OA$  приложен момент  $M$ . На шарнир  $A$  действует горизонтальная сила  $F$ . Длины стержней равны:  $OA = OC = AB = a$ . За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$  стержней  $OC$  и  $OA$ .



**1.40.** Стержни  $OC$  и  $OA$  жестко скреплены под углом  $90^\circ$ . На конце стержня расположена в точке  $C$  массой  $m_1$ . Масса стержня  $OA$  равна  $m_2$ . К цилиндру радиусом  $R$  приложен момент  $M$ . На шарнир  $A$  действует вертикальная сила  $F$ . Длины стержней равны:  $OA = OC = AB = a$ . За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$  стержней  $OC$  и  $OA$ .





**1.41.** Стержни  $OB$  и  $OA$ , скрепленные под углом  $90^\circ$ , образуют жесткий уголок, вращающийся вокруг шарнира  $O$ . Бруски массой  $m_1$  и  $m_2$  движутся в вертикальных направляющих. Концы стержней  $A$  и  $B$  скользят без сопротивления по граням брусков и приводят их в движение;  $OA = a$ ,  $OB = b$ . За обобщенную координату принять угол поворот  $\varphi$ .

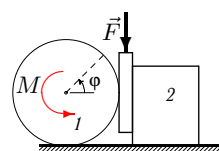
**1.42.** Стержни  $OB$  и  $OA$  жестко скреплены под углом  $90^\circ$ . Бруски массой  $m_1$  и  $m_2$  движутся в горизонтальных направляющих. Концы стержней  $A$  и  $B$  скользят по граням брусков и приводят их в движение;  $OA = a$ ,  $OB = b$ . За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$ .

**1.43.** Цилиндр радиусом  $r$  массой  $m_1$  катится по поверхности неподвижного цилиндра радиусом  $R$  и находится в зацеплении с бруском массой  $m_2$ , скользящим по грани подвижного блока. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

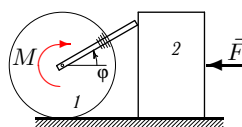
**1.44.** Цилиндр радиусом  $r$  катится по поверхности неподвижного цилиндра радиусом  $R$  и находится в зацеплении с бруском, скользящим по грани подвижного блока массой  $m_2$ . Масса стержня  $m_1$ . За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$  стержня  $OA$ .

**1.45.** Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности и находится в зацеплении с тонкой пластиной массой  $m_2$ . Другой гранью пластина скользит без сопротивления по вертикальной грани бруска. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

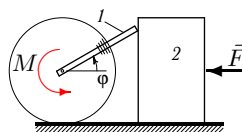
**1.46.** Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности и находится в зацеплении с тонкой пластиной. Другой гранью пластина скользит без сопротивления по вертикальной грани бруска массой  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .



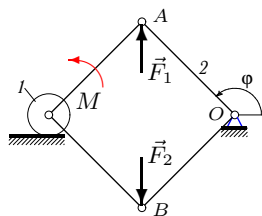
**1.47.** Цилиндр радиусом  $r$ , массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности. Стержень длиной  $a$  жестко соединен с цилиндром и скользит по боковой грани подвижного блока массой  $m_2$ . К блоку приложена сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .



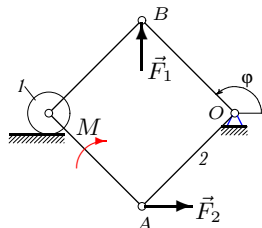
**1.48.** Цилиндр радиусом  $r$  катится по горизонтальной поверхности. Стержень длиной  $a$ , массой  $m_1$  жестко соединен с цилиндром и скользит по грани подвижного блока массой  $m_2$ . К блоку приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

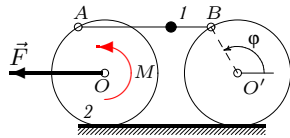


**1.49.** Шарнирный параллелограмм, состоящий из стержней одинаковой длины  $a$ , приводит в движение цилиндр массой  $m_1$ , катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Стержень  $OA$  имеет массу  $m_2$ , остальные стержни считать невесомыми. К шарнирам приложены вертикальные силы  $F_1 = F_2 = F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

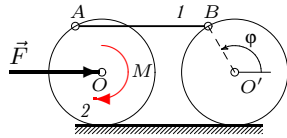


**1.50.** Шарнирный параллелограмм, состоящий из стержней одинаковой длины  $a$ , приводит в движение цилиндр массой  $m_1$ , катящийся по горизонтальной плоскости. Стержень  $OA$  имеет массу  $m_2$ , остальные стержни считать невесомыми. К шарниру  $A$  приложена горизонтальная сила, к шарниру  $B$  — вертикальная;  $F_1 = F_2 = F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

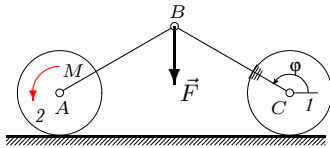




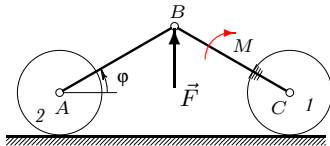
**1.51.** Два диска шарнирно соединены невесомым стержнем  $AB$ , на котором расположена точка массой  $m_1$ . К диску массой  $m_2$  приложен момент  $M$  и горизонтальная сила  $F$ . Второй диск считать невесомым;  $AB \parallel OO'$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



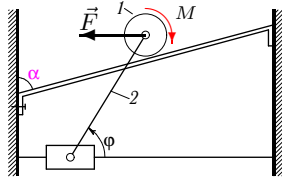
**1.52.** Два диска шарнирно соединены стержнем  $AB$  массой  $m_1$ . К диску массой  $m_2$  приложен момент  $M$  и горизонтальная сила  $F$ . Второй диск считать невесомым;  $AB \parallel OO'$ . Диски катятся по горизонтальной плоскости без проскальзывания. За обобщенную координату принять угол поворота невесомого диска  $\varphi$ .



**1.53.** Два диска массой  $m_1$  и  $m_2$  радиусом  $R$  шарнирно соединены невесомыми стержнями  $AB = BC = a$ . Стержень  $BC$  жестко скреплен с диском  $I$ . Момент  $M$  приложен к диску  $2$ , вертикальная сила  $F$  — к шарниру  $B$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



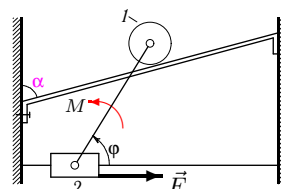
**1.54.** Два диска массой  $m_1$  и  $m_2$ , радиусом  $R$  шарнирно соединены невесомыми стержнями  $AB = BC = a$ . Стержень  $BC$  жестко скреплен с диском  $I$ . Момент  $M$  приложен к стержню  $BC$ , вертикальная сила  $F$  — к шарниру  $B$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



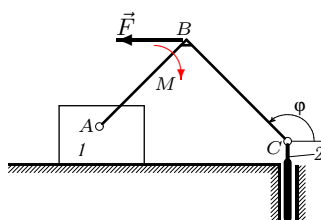
**1.55.** Диск массой  $m_1$ , радиусом  $R$  катится по наклонной балке. Стержень длиной  $L$  соединяет муфту, скользящую по горизонтальной направляющей, с осью диска. Момент  $M$  приложен к диску, сила  $F$  — к оси диска. Масса стержня  $m_2$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



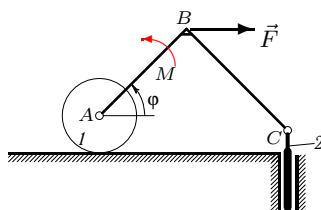
**1.56.** Диск массой  $m_1$ , радиусом  $R$  катится по наклонной балке. Невесомый стержень длиной  $L$  соединяет муфту, скользящую по горизонтальной направляющей, с осью диска. Момент  $M$  приложен к стержню, сила  $F$  — к муфте. Масса муфты  $m_2$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



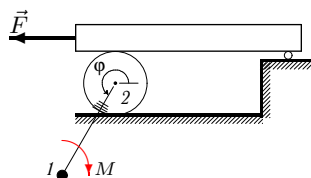
**1.57.** Невесомый изогнутый под прямым углом стержень соединяет груз массой  $m_1$  и поршень массой  $m_2$ , движущийся в вертикальных направляющих;  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Момент  $M$  приложен к стержню, горизонтальная сила  $F$  — к углу  $B$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



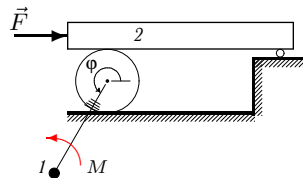
**1.58.\*** Невесомый изогнутый под прямым углом стержень соединяет цилиндр массой  $m_1$  и поршень массой  $m_2$ , движущийся в вертикальных направляющих;  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Момент  $M$  приложен к стержню, горизонтальная сила  $F$  — к углу  $B$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

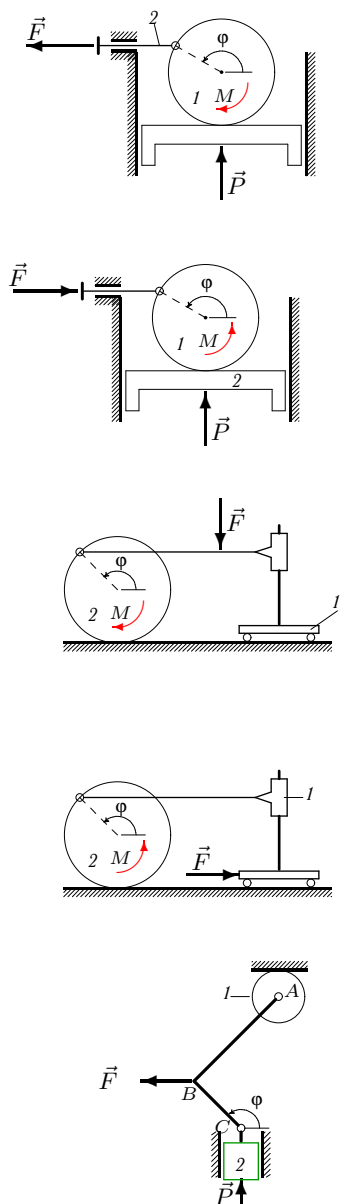


**1.59.** Стержень длиной  $L$  с точкой массой  $m_1$  на конце жестко соединен с диском радиусом  $R$ . Масса диска  $m_2$ . На диск положен без проскальзывания горизонтальный брусок, опирающийся одним концом на подшипник. Момент  $M$  приложен к стержню. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.60.** Стержень длиной  $L$  с точкой массой  $m_1$  на конце жестко соединен с диском радиусом  $R$ . На диск положен без проскальзывания горизонтальный брусок массой  $m_2$ , опирающийся одним концом на подшипник. Момент  $M$  приложен к стержню. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .





**1.61.** Цилиндр массой  $m_1$ , радиусом  $R$  находится на поверхности поршня. Шток массой  $m_2$ , движущийся в горизонтальных направляющих, шарнирно прикреплен к ободу цилиндра. Момент  $M$  приложен к цилиндру, сила  $P$  — к поршню,  $F$  — к штоку. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

**1.62.** Цилиндр массой  $m_1$ , радиусом  $R$  находится на поверхности поршня массой  $m_2$ . Шток, движущийся в горизонтальных направляющих, шарнирно прикреплен к ободу цилиндра. Момент  $M$  приложен к цилиндру, сила  $P$  — к поршню,  $F$  — к штоку. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

**1.63.** К муфте, движущейся по вертикальной стойке, закрепленной на тележке массой  $m_1$ , жестко прикреплена горизонтальная тяга, шарнирно соединенная с ободом диска. Масса диска  $m_2$ , радиус  $R$ . Момент  $M$  приложен к диску, вертикальная сила  $F$  — к тяге. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.64.** К муфте массой  $m_1$ , движущейся по вертикальной стойке, закрепленной на тележке, жестко прикреплена горизонтальная тяга, шарнирно соединенная с ободом диска. Масса диска  $m_2$ , радиус  $R$ . Момент  $M$  приложен к диску, горизонтальная сила  $F$  — к тележке. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.65.** Невесомый крюк  $ABC$ , изогнутый под прямым углом, шарнирно соединяет диск массой  $m_1$ , движущийся по горизонтальной поверхности, и вертикальный поршень массой  $m_2$ . Сила  $F$  приложена к углу  $B$ , сила  $P$  — к поршню;  $AB = a$ ,  $BC = b$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

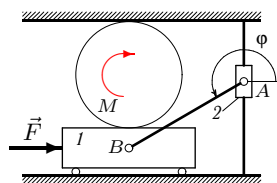
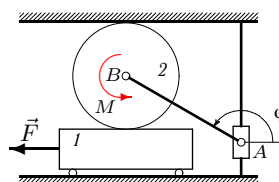
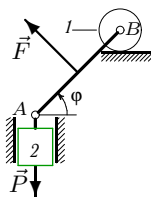
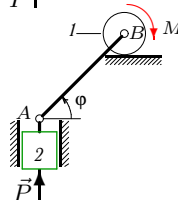
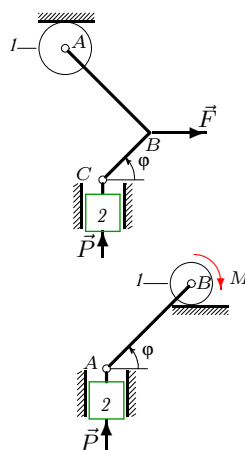
**1.66.** Невесомый крюк  $ABC$ , изогнутый под прямым углом, шарнирно соединяет диск массой  $m_1$ , движущийся по горизонтальной поверхности, и вертикальный поршень массой  $m_2$ . Сила  $F$  приложена к углу  $B$ , сила  $P$  — к поршню;  $AB = b$ ,  $BC = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

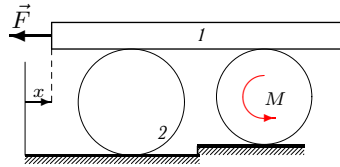
**1.67.** Невесомый стержень  $AB$  длиной  $a$  шарнирно соединяет диск массой  $m_1$ , движущийся по горизонтальной поверхности, и вертикальный поршень массой  $m_2$ . Момент  $M$  приложен к диску, сила  $P$  — к поршню. Радиус диска  $R$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.68.** Невесомый стержень  $AB$  длиной  $a$  шарнирно соединяет диск массой  $m_1$ , движущийся по горизонтальной поверхности, и вертикальный поршень массой  $m_2$ . Сила  $F$  приложена к середине стержня под прямым углом, сила  $P$  — к поршню. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

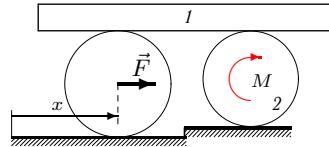
**1.69.** По вертикальной направляющей движется муфта  $A$ , шарнирно соединенная с диском радиусом  $R$ . Верхней точкой обода диск касается горизонтальной поверхности, нижней — бруска массой  $m_1$  на невесомых подшипниках. Масса диска  $m_2$ ;  $AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.70.** По вертикальной направляющей движется муфта  $A$ , шарнирно соединенная с бруском. Верхней точкой обода диск касается горизонтальной поверхности, нижней — бруска массой  $m_1$  на невесомых подшипниках. Масса муфты  $m_2$ ;  $AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

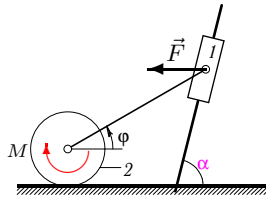




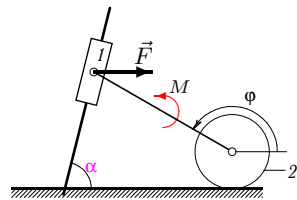
**1.71.\*** Брусок массой  $m_1$  горизонтально лежит на двух цилиндрах. К цилиндру радиусом  $r$  приложен момент  $M$ , к бруску — сила  $F$ . Масса цилиндра большего радиуса равна  $m_2$ . Проскальзывание во всех точках контакта отсутствует. За обобщенную координату принять  $x$ .



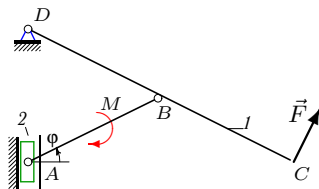
**1.72.** Брусок массой  $m_1$  горизонтально лежит на двух цилиндрах радиусами  $R$  и  $r$ . К одному цилиндру массой  $m_2$  приложен момент  $M$ , к оси другого — сила  $F$ . Проскальзывание во всех точках контакта отсутствует. За обобщенную координату принять перемещение центра цилиндра  $x$ .



**1.73.** Муфта массой  $m_1$ , скользящая по направляющей, наклоненной под углом  $\alpha$ , шарнирно соединена невесомым стержнем с диском массой  $m_2$  радиусом  $R$ . К диску приложен момент  $M$ , к муфте — горизонтальная сила  $F$ . Длина стержня  $a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

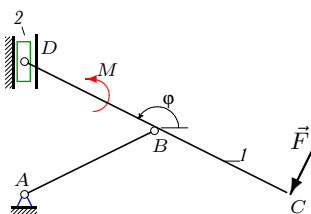


**1.74.\*** Муфта массой  $m_1$ , скользящая по направляющей, наклоненной под углом  $\alpha$ , шарнирно соединена невесомым стержнем с диском массой  $m_2$  радиусом  $R$ . К стержню приложен момент  $M$ , к муфте — горизонтальная сила  $F$ . Длина стержня  $a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

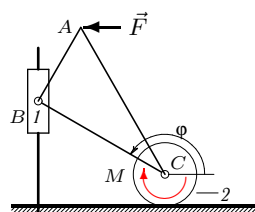


**1.75.** Стержень  $CD$  массой  $m_1$  и стержень  $AB$  шарнирно соединены.  $AB = BC = BD = a$ . Масса ползуна, скользящего по вертикальной плоскости, равна  $m_2$ . К стержню  $AB$  приложен момент  $M$ ; сила  $F$  перпендикулярна  $CD$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

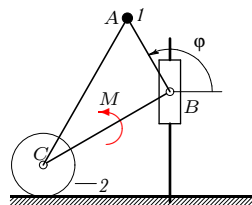
**1.76.** Стержень  $CD$  массой  $m_1$  и стержень  $AB$  шарнирно соединены;  $AB = BC = BD = a$ . Масса ползуна, скользящего по вертикальной плоскости, равна  $m_2$ . К стержню  $CD$  приложен момент  $M$ ; сила  $F$  перпендикулярна  $CD$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



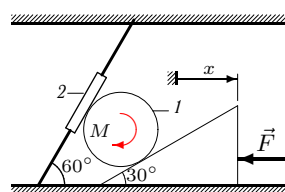
**1.77.** Треугольная пластина шарнирно прикреплена к муфте, скользящей по вертикальной направляющей, и диску радиусом  $R$ . Масса ползуна  $m_1$ , диска —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ ;  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AB \perp BC$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



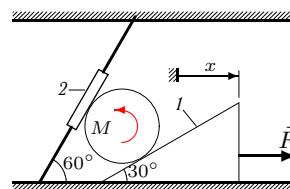
**1.78.** Треугольная пластина шарнирно прикреплена к муфте, скользящей по вертикальной направляющей, и диску радиусом  $R$ . Масса точки на вершине  $A$  равна  $m_1$ , масса диска —  $m_2$ . К пластине приложен момент  $M$ ;  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AB \perp BC$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

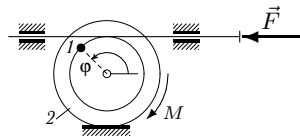
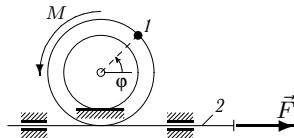
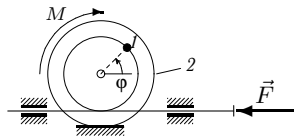
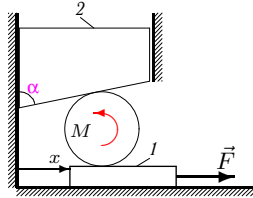
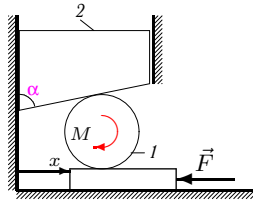


**1.79.** Цилиндр радиусом  $R$  зажат между муфтой, надетой на наклонный стержень, и призмой, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса цилиндра равна  $m_1$ , муфты —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение призмы  $x$ .



**1.80.** Цилиндр радиусом  $R$  зажат между муфтой, надетой на наклонный стержень, и призмой, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса призмы равна  $m_1$ , муфты —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение призмы  $x$ .





**1.81.** Цилиндр радиусом  $R$  прижимается скошенным прессом (призмой) к пластине, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса цилиндра  $m_1$ , призмы —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение пластины  $x$ .

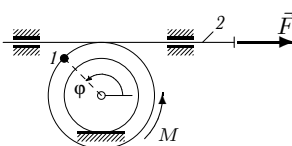
**1.82.** Цилиндр радиусом  $R$  прижимается скошенным прессом (призмой) к пластине, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса пластины равна  $m_1$ , призмы —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение пластины  $x$ .

**1.83.** Внешним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внутренним — касается подвижного штока. На внутреннем ободе блока расположена точка массой  $m_1$ . Радиусы блока  $R$  и  $r$ . Масса блока равна  $m_2$ , радиус инерции  $\rho$ . К блоку приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

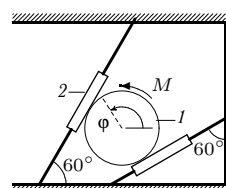
**1.84.** Внутренним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внешним — касается штока, скользящего в горизонтальных направляющих. На блоке расположена точка массой  $m_1$ . Радиусы блока  $R$  и  $r$ . Масса штока  $m_2$ . К блоку приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.85.\*** Внешним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внутренним — касается подвижного штока. На блоке расположена точка массой  $m_1$ . Радиусы блока  $R$  и  $r$ . Масса блока равна  $m_2$ , радиус инерции  $\rho$ . К блоку приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

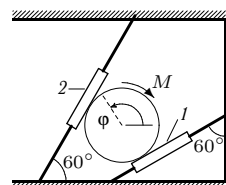
**1.86.** Внутренним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внешним — касается подвижного штока. На блоке расположена точка массой  $m_1$ . Радиусы блока  $R$  и  $r$ . Масса штока  $m_2$ . К блоку приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



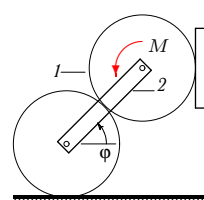
**1.87.** Цилиндр радиусом  $R$  приводит в движение муфты, надетые на наклонные стержни. Масса цилиндра  $m_1$ , масса верхней муфты  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ . Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



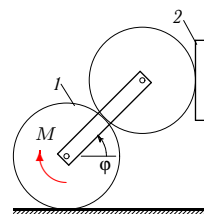
**1.88.** Цилиндр радиусом  $R$  приводит в движение муфты, надетые на наклонные жестко закрепленные стержни. Массы муфт  $m_1$  и  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ . Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

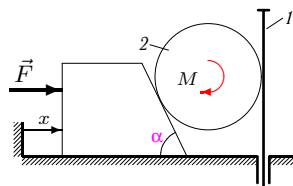
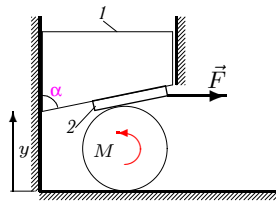
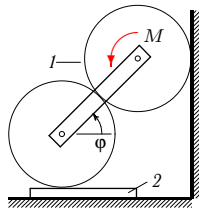
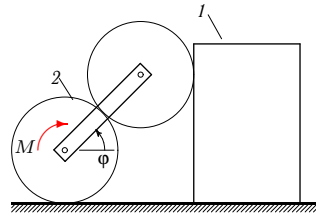
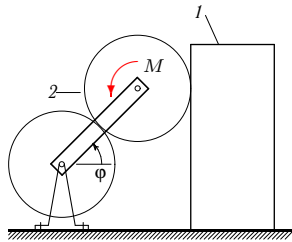


**1.89.** Оси цилиндров радиусом  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по пластинке, скользящей по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по горизонтальной поверхности. К верхнему цилиндру массой  $m_1$  приложен момент  $M$ , масса спарника  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .



**1.90.** Оси цилиндров радиусом  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр катится по пластинке, скользящей по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр массой  $m_1$  находится в зацеплении с верхним. К нижнему цилиндру приложен момент  $M$ . Масса пластинки  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .





**1.91.** Оси цилиндров радиусами  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по боковой грани параллелепипеда массой  $m_1$ , скользящего по горизонтальной плоскости. Нижний цилиндр, вращающийся на неподвижной оси, находится в зацеплении с верхним. К верхнему цилиндру массой  $m_2$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .

**1.92.** Оси цилиндров радиусами  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр катится по боковой грани параллелепипеда массой  $m_1$ , скользящего по горизонтальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним. К нижнему цилиндру массой  $m_2$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .

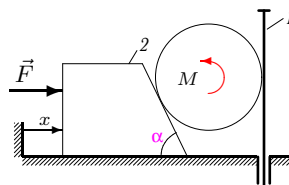
**1.93.** Оси цилиндров радиусами  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр массой  $m_1$  катится по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по пластинке массой  $m_2$ , скользящей по горизонтальной плоскости. За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .

**1.94.** Между цилиндром радиусом  $R$  и скошенным прессом (призмой) массой  $m_1$  зажата пластина массой  $m_2$ , скользящая по гладкой поверхности прессы. К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение прессы  $y$ .

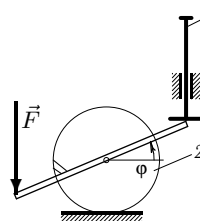
**1.95.** Цилиндр радиусом  $R$  касается вертикального штока массой  $m_1$  и призмы, скользящей по горизонтальной плоскости. Масса цилиндра  $m_2$ . К призме приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ . За обобщенную координату принять смещение призмы  $x$ .



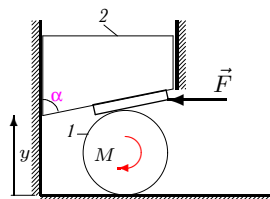
**1.96.\*** Цилиндр радиусом  $R$  касается вертикального штока массой  $m_1$  и призмы, скользящей по горизонтальной плоскости. Масса призмы  $m_2$ . К призме приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ . За обобщенную координату принять смещение призмы  $x$ .



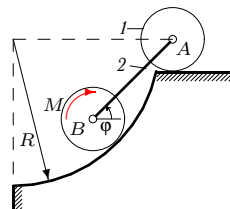
**1.97.\*** Шток массой  $m_1$  движется в вертикальных направляющих. Стержень длиной  $2a$ , жестко закрепленный в центре с осью цилиндра массой  $m_2$  и радиусом  $R$ , скользит одним концом по нижней горизонтальной поверхности штока. К другому концу стержня приложена вертикальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .



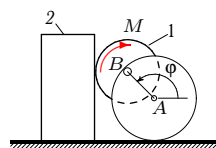
**1.98.** Между цилиндром радиусом  $R$  и скошенным прессом зажата пластина, скользящая по гладкой поверхности прессы. Масса цилиндра  $m_1$ , призмы —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение прессы  $y$ .

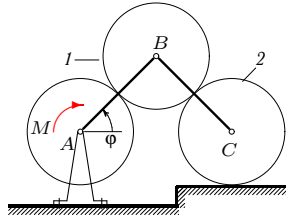
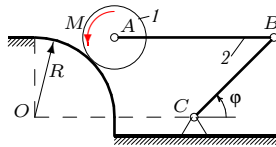
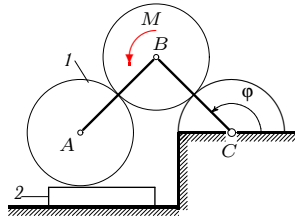
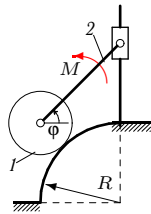
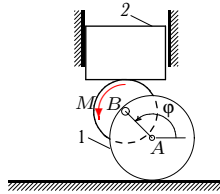


**1.99.** Оси двух дисков радиусами  $r$  соединены стержнем длиной  $4r$ . Диск  $A$  массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности, диск  $B$  — по неподвижной цилиндрической поверхности радиусом  $R = 5r$ . К диску  $B$  приложен момент  $M$ . Масса стержня  $m_2$ , массой диска  $B$  пренебречь. За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .



**1.100.** На ободе диска  $A$  радиусом  $R$  шарнирно закреплен диск  $B$  радиусом  $r$ , массой  $m_1$ . Диск  $A$  катится по горизонтальной поверхности, диск  $B$  — по боковой поверхности груза массой  $m_2$ , скользящего по горизонтальной поверхности. К диску  $B$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота диска  $A$ .





**1.101.** На ободе диска  $A$  радиусом  $R$ , массой  $m_1$  шарнирно закреплен диск  $B$  радиусом  $r$ . Диск  $A$  катится по горизонтальной поверхности, диск  $B$  — по нижней поверхности вертикально перемещающегося поршня массой  $m_2$ . К диску  $B$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота диска  $A$ .

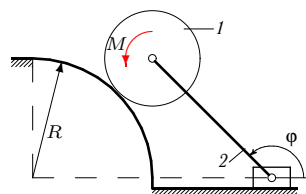
**1.102.** Ось диска массой  $m_1$ , радиусом  $r$  соединена стержнем длиной  $3r$  с муфтой, скользящей по вертикальной направляющей. Диск катится по неподвижной цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ . К стержню массой  $m_2$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**1.103.** Оси цилиндров  $A$  и  $B$  радиусами  $R$ , находящиеся в зацеплении, шарнирно соединены невесомым звеном  $AB$ . Цилиндр  $B$  катится по неподвижному цилиндру радиусом  $R$ , цилиндр  $A$  массой  $m_1$  — по пластине массой  $m_2$ , скользящей по горизонтальной поверхности. За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота стержня  $CB$ .

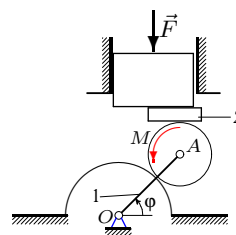
**1.104.** Механизм состоит из диска массой  $m_1$  радиусом  $r$ , стержня  $AB$  массой  $m_2$  и кривошипа  $CB$  длиной  $3r$ . Диск катится по неподвижной цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ ,  $AB = OC$ . К диску приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .

**1.105.** Оси цилиндров  $A$ ,  $B$  и  $C$  радиусом  $R$ , находящиеся в зацеплении, соединены шарнирным двухзвенником  $ABC$ . Цилиндр  $B$  имеет массу  $m_1$ . Ось цилиндра  $A$  неподвижна. К цилиндру  $A$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота стержня  $AB$ .

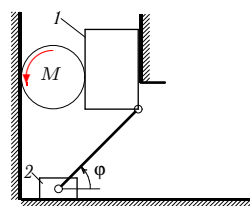
**1.106.** Диск массой  $m_1$  и радиусом  $r$  соединен с ползуном стержнем длиной  $3r$ . Диск катится по неподвижной цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса стержня  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



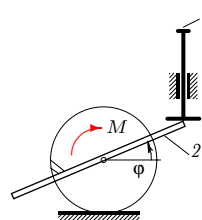
**1.107.** Диск радиусом  $r$  катится по поверхности неподвижного цилиндра радиусом  $R$  и находится в зацеплении с бруском массой  $m_2$ , скользящим по нижней грани прессы, движущегося вертикально. Оси цилиндров соединены стержнем массой  $m_1$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



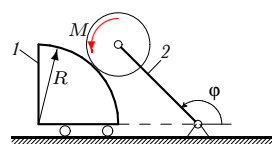
**1.108.** Диск радиусом  $r$  и прямоугольный блок массой  $m_1$  движутся между вертикальными плоскостями. Горизонтально скользящий ползун массой  $m_2$  соединен с блоком невесомым стержнем длиной  $L$ . К диску приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

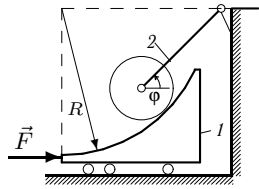


**1.109** Шток массой  $m_1$  свободно движется в вертикальных направляющих. Стержень массой  $m_2$  длиной  $2a$ , жестко скрепленный с цилиндром, скользит одним концом по нижней поверхности штока. К цилиндру радиусом  $R$  приложен момент  $M$ . Центр стержня соединен с центром цилиндра. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

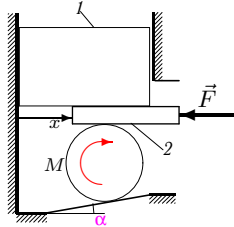


**1.110.** Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По боковой цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = 3r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $4r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса стержня  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

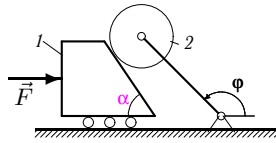




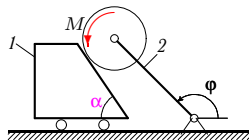
**1.111.** Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = 4r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $3r$  и массой  $m_2$ . К грузу приложена сила  $F$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



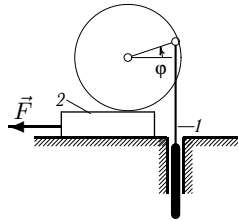
**1.112.** Между диском радиусом  $R$  и прессом массой  $m_1$  зажата пластина массой  $m_2$ , скользящая по гладкой поверхности прессы. Диск катится по поверхности, наклоненной под углом  $\alpha$ . К диску приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять горизонтальное перемещение пластины  $x$ .



**1.113.** Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По боковой поверхности груза катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $5r$ . К грузу приложена сила  $F$ . Масса диска  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

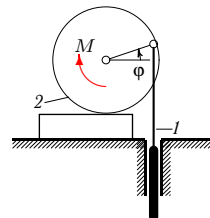


**1.114.** Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По боковой поверхности груза катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $4r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса стержня  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

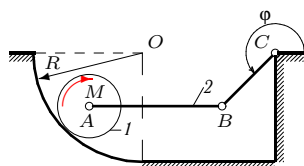


**1.115.** Вертикально движущийся поршень массой  $m_1$  закреплен шарнирно на ободу диска радиусом  $R$ . Диск без проскальзывания катится по пластине, лежащей на гладкой плоскости. К пластине приложена сила  $F$ . Масса пластины  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .

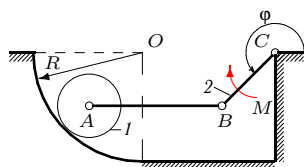
**1.116.** Вертикально движущийся поршень массой  $m_1$  закреплен шарнирно на ободе диска радиусом  $R$ . Диск массой  $m_2$  без проскальзывания катится по пластине, лежащей на гладкой плоскости. К диску приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .



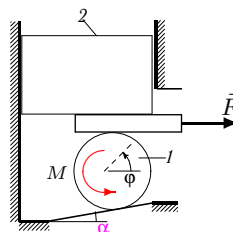
**1.117.** Диск радиусом  $r$  массой  $m_1$  катится по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиусом  $R = 4r$ . Длина кривошипа  $BC$  равна  $3r$ . К диску приложен внешний момент  $M$ . Масса стержня  $AB$  равна  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота стержня  $BC$ .



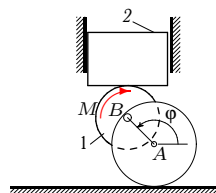
**1.118.** Диск радиусом  $r$  массой  $m_1$ , шарнирно закрепленный на конце невесомого стержня  $AB$ , катится без проскальзывания по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиусом  $R = 4r$ . К стержню  $BC$  длиной  $3r$  и массой  $m_2$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .



**1.119.** Между диском массой  $m_1$  и радиусом  $R$  и прессом массой  $m_2$  зажата пластина, скользящая по гладкой поверхности прессы. Пресс движется в вертикальных направляющих. Диск катится по поверхности, составляющей с горизонтом угол  $\alpha$ . К диску приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .



**1.120.** На ободе диска  $A$  радиусом  $R$  шарнирно закреплен диск  $B$  радиусом  $r$  и массой  $m_1$ . Диск  $A$  катится по горизонтальной поверхности, диск  $B$  — по нижней поверхности вертикально перемещающегося поршня массой  $m_2$ . К диску  $B$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота диска  $A$ .



## Примеры решений

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Определение кинематических зависимостей. Выражение скоростей (угловых скоростей) через обобщенную скорость и обобщенную координату.
2. Нахождение кинетической энергии системы.
3. Определение обобщенной силы.
4. Составление уравнения.

Разберем отдельно каждый пункт плана.

#### 1. Определение кинематических зависимостей

Скорость точки  $B$  тела при плоском движении вычисляют через известную скорость какой-либо точки  $A$  того же тела, принимаемой за полюс (рис. 1):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad \vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_1 \times \vec{AB}. \quad (I.1)$$

Для расчета скоростей точек механизма формулу (I.1) применяют последовательно для всех точек, переходя от одной точки, принимаемой за полюс, к другой. Схему вычислений в этом случае удобно записывать в виде структурных формул (графов [8], [6])

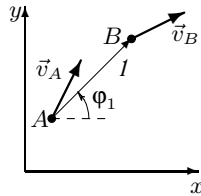


Рис. 1

где над стрелкой указан номер тела или наименование стержня, которому принадлежат точки, а снизу — угол  $\varphi$  между осью  $x$  и вектором  $\vec{AB}$ . В проекциях на оси  $x, y$  граф (I.3) дает уравнения:

$$A \xrightarrow[\varphi_1]{1} B, \quad (I.2)$$

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} - AB \omega_{1z} \sin \varphi_1; \\ v_{By} &= v_{Ay} + AB \omega_{1z} \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (I.3)$$

где  $\omega_{1z}$  — проекция угловой скорости тела  $1$  на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости движения.

В качестве вершин графа удобно брать точки механизма с заданными или искомыми скоростями. При этом скорость может быть задана частично, например, только по направлению. Если в задаче имеется

тело (обычно диск или цилиндр), катящееся без проскальзывания по какой-либо поверхности, то точка касания тела может быть вершиной графа, так как скорость ее равна нулю.

Метод кинематических графов удобен и прост в решении. Однако следует предупредить о характерной ошибке, встречающейся при составлении графов. Так, при рассмотрении графа для рис. 1 «в обратном направлении»  $B \xrightarrow{\pi+\varphi_1} A$ , можно ошибиться при выборе угла. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Bx} - AB \omega_{1z} \sin(\pi + \varphi_1); \\ v_{Ay} &= v_{By} + AB \omega_{1z} \cos(\pi + \varphi_1). \end{aligned} \quad (I.4)$$

Уравнения (I.3) и (I.4) совпадают.

В некоторых очевидных случаях метод кинематических графов применять нецелесообразно. Например, при определении скорости точки  $A$  цилиндра, катящегося по неподвижной поверхности, по заданной скорости центра  $O$  (рис. 2) проще использовать понятие мгновенного центра скоростей (МЦС). Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка  $P$  касания плоскости неподвижна.

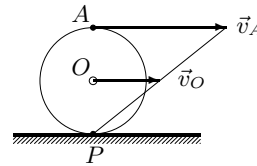


Рис. 2

Следовательно, учитывая линейное распределение скоростей, получаем  $v_{Ox} = v_{Ax}/2$ . В общем же случае метод МЦС связывает модули угловых скоростей, поэтому для решения задачи он непригоден, так как при вычислении обобщенной силы необходимы проекции скоростей.

Для определения проекций скоростей можно также воспользоваться координатным методом. Рассмотрим кривошипно-шатунный механизм (рис. 3). Кривошип  $AB$ , вращаясь вокруг оси в подшипнике  $A$ , посредством шатуна  $BC$  сообщает возвратно-поступательное движение ползуну  $C$ . Дано:  $AB = BC = l$ . Силы, действующие на механизм, не указаны, для кинематического анализа они не требуются.

Пусть  $\varphi$  — обобщенная координата. Найдем скорость ползуна. Для этого определим его координату

$$x_C = x_A + 2l \cos \varphi.$$

Дифференцируя это равенство, получаем:

$$v_{xC} = -2l\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (I.5)$$

Легко проверить, что этот же результат получается методом графов.

Строим граф  $A \xrightarrow{l} B \xrightarrow{-l} C$ . Записываем оба уравнения графа в проекции и на оси  $x$  и  $y$ . Вычисляем из второго уравнения графа (в проекции на  $y$ ) скорость

$$v_{Cy} = v_{Ay} + l\dot{\varphi} \cos \varphi + l\omega_{BCz} \cos(-\varphi)$$

угловую скорость  $\omega_{BCz} = -\dot{\varphi}$ . Подставляем ее в первое уравнение графа

$$v_{Cx} = v_{Ax} - l\dot{\varphi} \sin \varphi - l\omega_{BCz} \sin(-\varphi),$$

получаем тот же результат (1.5), но более сложным способом.

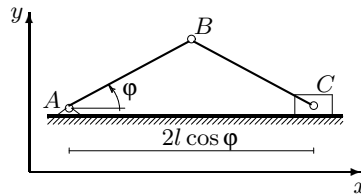


Рис. 3

## 2. Нахождение кинетической энергии системы

Для получения кинетической энергии системы следует помнить несколько основных вариантов:

а) поступательное движение тела массой  $m$  со скоростью  $v$  или движение точки

$$T = \frac{mv^2}{2};$$

б) вращательное движение тела с моментом инерции  $J$  относительно оси вращения с угловой скоростью  $\omega$

$$T = \frac{J\omega^2}{2};$$

в) плоское движение тела с массой  $m$

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2},$$

где  $v_c$  — скорость центра масс тела,  $\omega$  — угловая скорость,  $J_c$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс;



г) качение однородного цилиндра по поверхности (см. рис. 2)

$$T = \frac{mv_O^2}{2} + \frac{J_O\omega^2}{2} = \frac{mv_O^2}{2} + \frac{mR^2(v_O/R)^2}{4} = \frac{3mv_O^2}{4}. \quad (1.6)$$

Напомним также выражение момента инерции стержня длиной  $AB = l$  и массой  $m$  (рис. 4) относительно середины <sup>1)</sup>

$$J_O = \frac{ml^2}{12}$$

и относительно конца  $J_A = ml^2/3$ . Если известен радиус инерции тела  $\rho$  (обычно блока колес), то момент инерции вычисляется по формуле  $J = m\rho^2$ .



Рис. 4

### 3. Определение обобщенной силы

Обобщенная сила находится с использованием скалярного произведения при вычислении мощности. Пусть  $q$  — обобщенная координата. Тогда для стационарных связей справедливо выражение

$$Q = \frac{1}{\dot{q}} (\vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k + \vec{M}_1 \cdot \vec{\omega}_1 + \vec{M}_2 \cdot \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{M}_n \cdot \vec{\omega}_n),$$

где  $\vec{F}_i$ ,  $i = 1 \dots k$  и  $\vec{M}_j$ ,  $j = 1 \dots n$  — действующие на систему силы и моменты;  $\vec{v}_i$  — скорости точек приложения сил,  $\vec{\omega}_j$  — угловые скорости тел, к которым приложены моменты.

### 4. Составление уравнения

При заданных выражениях для кинетической энергии и обобщенной силы составление уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

<sup>1)</sup> Когда говорится, что момент инерции вычисляется относительно середины, то подразумевается момент инерции относительно оси, проходящей через середину стержня.

сводится к дифференцированию кинетической энергии по обобщенной координате и обобщенной скорости. Эта процедура в основном одинаковая для всех задач. Например, если кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{q}^2}{2} (A + B \sin^2 q + C \sin 2q),$$

то частные производные легко вычисляются:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dot{q}(A + B \sin^2 q + C \sin 2q), \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\dot{q}^2}{2}(B \sin 2q + 2C \cos 2q).$$

Полная производная по времени определяется по формуле

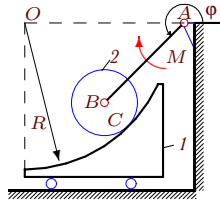
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \ddot{q}(A + B \sin^2 q + C \sin 2q) + \dot{q}^2 (B \sin 2q + 2C \cos 2q).$$

Окончательно уравнение примет вид

$$\ddot{q}(A + B \sin^2 q + C \sin 2q) + (1/2)\dot{q}^2 (B \sin 2q + 2C \cos 2q) = Q.$$

Приведем краткие решения некоторых задач.

### Задача 1



Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = 3r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне  $AB$  длиной  $2r$ . К стержню приложен момент  $M$ . Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

### Решение

Заметим, что по условию задачи треугольник  $OBA$  равнобедренный. Отсюда угол между  $BC$  и осью  $x$  (горизонтальная ось направо) равен  $\pi - \varphi$ . Составляем кинематический граф  $A \xrightarrow{\frac{AB}{\varphi}} B \xrightarrow{\frac{r}{\pi - \varphi}} C$ , где  $C$  — точка касания диска и груза. Соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} - AB\dot{\varphi} \sin \varphi - r\omega_z \sin(\pi - \varphi); \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + AB\dot{\varphi} \cos \varphi + r\omega_z \cos(\pi - \varphi). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ax} = v_{Ay} = 0$  и  $v_{Cy} = 0$ , получаем угловую скорость диска и скорость груза:  $\omega_z = 2\dot{\varphi}$ ,  $v_{Cx} = -4r\dot{\varphi} \sin \varphi$ .

Вычислим кинетическую энергию груза, совершающего поступательное движение

$$T_1 = \frac{m_1 v_{Cx}^2}{2} = 8m_1 \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2 \varphi.$$

Из графа  $A \xrightarrow{\frac{AB}{\varphi}} B$  сразу же следует:

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= -AB\dot{\varphi} \sin \varphi; \\ v_{By} &= AB\dot{\varphi} \cos \varphi, \end{aligned}$$

и  $v_B^2 = 4r^2 \dot{\varphi}^2$ . Кинетическая энергия плоского движения диска примет вид

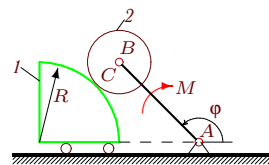
$$T_2 = \frac{m_2 v_B^2}{2} + \frac{J_2 \omega_z^2}{2} = 2m_2 \dot{\varphi}^2 r^2 + m_2 \dot{\varphi}^2 r^2.$$

Суммарная кинетическая энергия имеет вид  $T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin^2 \varphi)$ .

Обобщенная сила  $Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (-M\dot{\varphi} + (-m_2 g) v_{By}) = -M - 2m_2 r g \cos \varphi$ .

### Задача 2

Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По боковой цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = 3r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне  $AB$  длиной  $4r$ . К стержню приложен момент  $M$ . Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



### Решение

Составляем кинематический граф  $A \xrightarrow{\frac{AB}{\varphi}} B \xrightarrow{\frac{r}{2\pi-\varphi}} C$ , где  $C$  — точка касания диска и груза. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} - AB\dot{\varphi} \sin \varphi - r\omega_z \sin(2\pi - \varphi); \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + AB\dot{\varphi} \cos \varphi + r\omega_z \cos(2\pi - \varphi). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ax} = v_{Ay} = 0$  и  $v_{Cy} = 0$ , выразим угловую скорость диска и скорость груза через обобщенную скорость и обобщенную координату

$$\omega_z = -4\dot{\varphi}, \quad v_{Cx} = -8r\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Вычислим кинетическую энергию груза, совершающего поступательное движение со скоростью  $v_{Cx}$

$$T_1 = \frac{m_1 v_{Cx}^2}{2} = 32m_1 \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2 \varphi.$$

Из графа  $A \xrightarrow{\frac{AB}{\varphi}} B$  сразу же следует

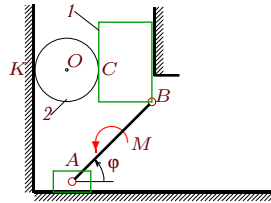
$$\begin{aligned} v_{Bx} &= -AB\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} &= AB\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

и  $v_B^2 = 16r^2\dot{\varphi}^2$ . Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, имеющего момент инерции относительно центральной оси  $J_2 = m_2 r^2/2$ , состоит из двух слагаемых

$$T_2 = \frac{m_2 v_B^2}{2} + \frac{J_2 \omega_z^2}{2} = 8m_2 \dot{\varphi}^2 r^2 + 4m_2 \dot{\varphi}^2 r^2.$$

Суммарная кинетическая энергия всей системы как функция обобщенной скорости  $\dot{\varphi}$  имеет вид  $T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin^2 \varphi)$ . В выражение обобщенной силы войдет сила тяжести диска и внешний момент  $Q = \frac{1}{\varphi} ((-M)\dot{\varphi} + (-m_2 g)v_{By}) = -M - 4m_2 r g \cos \varphi$ . Вертикальная сила тяжести груза  $I$  на горизонтальной скорости не имеет мощности.

### Задача 3



Диск радиусом  $r$  и прямоугольный груз массой  $m_1$  движутся между вертикальными плоскостями. Горизонтально скользящий ползун соединен с грузом стержнем длиной  $L$ . К стержню приложен момент  $M$ . Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

### Решение

Для вычисления кинетической энергии потребуются выражения скорости центра диска, его угловой скорости и скорости груза через обобщенную скорость  $\dot{\varphi}$ . Рассмотрим сначала кинематический граф  $A \xrightarrow{\frac{L}{\varphi}} B$ . Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} - L\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} &= v_{Ay} + L\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ay} = v_{Bx} = 0$ , получаем скорость скольжения ползуна и скорость поступательного движения груза

$$v_{Ax} = L\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_{By} = L\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Составим граф  $K \xrightarrow{\frac{2r}{0}} C$  для определения угловой скорости диска и получим

$$v_{Cy} = v_{Ky} + 2r\omega_z \cos \theta.$$

Здесь  $C$  и  $K$  — точки касания диска с грузом и стеной. Ясно, что  $v_{Kx} = v_{Ky} = 0$ ,  $v_C = v_B$ , поэтому  $\omega_z = (L/(2r))\dot{\varphi} \cos \varphi$ . Далее, из

графа от МЦС диска к его центру  $K \xrightarrow{\frac{r}{0}} O$  следует  $v_{Oy} = r\omega_z \cos \theta$ , или  $v_{Oy} = (1/2)L\dot{\varphi} \cos \varphi$ . Заметим, то, что скорость центра  $O$  вдвое меньше скорости точки  $C$  легче получить, используя понятие МЦС. У диска МЦС — точка  $K$ .

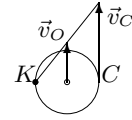


Рис. 5

Вычислим кинетическую энергию груза, совершающего поступательное движение

$$T_1 = \frac{m_1 v_{By}^2}{2} = \frac{m_1}{2} L^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi.$$

Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, согласно (1.6), имеет вид

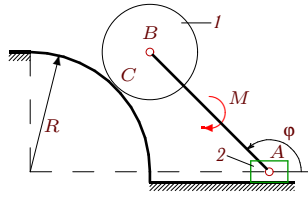
$$T_2 = \frac{3m_2 v_O^2}{4} = \frac{3m_2}{16} L^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi.$$

Суммарная кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} B \cos^2 \varphi.$$

Обобщенная сила вычисляется по мощности момента  $M$  и сил тяжести тел 1 и 2:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (M\dot{\varphi} + (-m_1 g)v_{By} + (-m_2 g)v_{Oy}) = M - gL \left( m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \cos \varphi.$$

**Задача 4**

Диск массой  $m_1$  и радиусом  $r$  соединен с ползуном стержнем длиной  $3r$ . Диск катится по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ . К стержню приложен момент  $M$ . Масса ползуна  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Решение**

Составляем кинематический граф  $A \xrightarrow{\frac{3r}{\varphi}} B \xrightarrow{\frac{r}{-\varphi}} C$ , где  $C$  — точка касания диска и поверхности. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} - 3r\dot{\varphi} \sin \varphi - r\omega_z \sin(-\varphi); \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + 3r\dot{\varphi} \cos \varphi + r\omega_z \cos(-\varphi). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ay} = 0$  и  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$ , получаем угловую скорость диска и скорость ползуна  $\omega_z = -3\dot{\varphi}$ ,  $v_{Ax} = 6r\dot{\varphi} \sin \varphi$ . Из графа  $A \xrightarrow{\frac{3r}{\varphi}} B$  сразу же следует:

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= 3r\dot{\varphi} \sin \varphi; \\ v_{By} &= 3r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

и  $v_B^2 = 9r^2\dot{\varphi}^2$ . Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, определяется по формуле (I.6)

$$T_1 = \frac{3m_1 v_B^2}{4} = \frac{27}{4} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Вычислим кинетическую энергию ползуна, совершающего поступательное движение

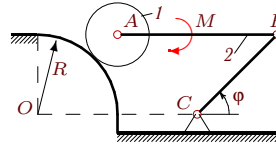
$$T_2 = \frac{m_2 v_{Ax}^2}{2} = 18m_2 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Кинетическая энергия системы имеет вид  $T = (\dot{\varphi}^2/2) (A + B \sin^2 \varphi)$ . Обобщенная сила вычисляется по моменту  $M$  и силе тяжести тела 1:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} ((-M)\dot{\varphi} + (-m_1 g)v_{By}) = -M - 3m_1 g r \cos \varphi.$$

**Задача 5**

Механизм состоит из диска массой  $m_1$  и радиусом  $r$ , шарнирно соединенных стержня  $AB$  массой  $m_2$  и кривошипа  $CB$  длиной  $3r$ . Диск катится по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ ,  $AB = OC$ . К стержню  $AB$  приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .



**Решение**

По условию задачи  $OA = BC = 3r$ ,  $AB = OC$ , поэтому  $ABCO$  — параллелограмм, следовательно, стержень  $AB$  движется поступательно. При поступательном движении тела скорости всех его точек равны  $v_A = v_B$ , а угловая скорость равна нулю:  $\omega_{2z} = 0$ . Составляем кинематический граф  $C \xrightarrow{3r} B$ , из которого сразу же следует:

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= -3r\dot{\varphi} \sin \varphi; \\ v_{By} &= 3r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

и  $v_A^2 = v_B^2 = 9r^2\dot{\varphi}^2$ . Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности,

$$T_1 = \frac{3m_1v_A^2}{4} = \frac{27}{4}m_1r^2\dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия поступательного движения стержня  $AB$

$$T_2 = \frac{m_2v_A^2}{2} = \frac{9m_2r^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия имеет вид

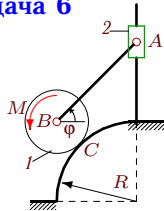
$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}A,$$

где  $A$  — некоторая константа (обобщенный момент инерции механизма). Обобщенная сила

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}((-M)\omega_{2z} + (-m_1g)v_{Ay} + (-m_2g)v_{Ay}) = -3(m_1 + m_2)gr \cos \varphi.$$

Для  $A = \text{const}$  уравнение Лагранжа имеет простой вид  $A\ddot{\varphi} = Q$  и не отличается от уравнения движения точки.

## Задача 6



Ось диска массой  $m_1$  и радиусом  $r$  соединена стержнем длиной  $3r$  с муфтой, скользящей по вертикальной направляющей. Диск катится по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса муфты  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

## Решение

Составляем кинематический граф  $A \xrightarrow{\pi+\varphi} B \xrightarrow{-\varphi} C$ , где  $C$  — точка касания диска и поверхности. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} - 3r\dot{\varphi} \sin(\pi + \varphi) - r\omega_z \sin(-\varphi); \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + 3r\dot{\varphi} \cos(\pi + \varphi) + r\omega_z \cos(-\varphi). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ax} = 0$  и  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$ , получаем угловую скорость диска и скорость ползуна:  $\omega_z = -3\dot{\varphi}$ ,  $v_{Ay} = 6r\dot{\varphi} \cos \varphi$ .

Из графа  $A \xrightarrow{\pi+\varphi} B$  сразу же следует:

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= -3r\dot{\varphi} \sin(\pi + \varphi) = 3r\dot{\varphi} \sin \varphi; \\ v_{By} &= v_{Ay} + 3r\dot{\varphi} \cos(\pi + \varphi) = 3r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

и  $v_B^2 = 9r^2\dot{\varphi}^2$ . Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, определяется по формуле

$$T_1 = \frac{3m_1 v_B^2}{4} = \frac{27}{4} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Вычислим кинетическую энергию ползуна 2, совершающего поступательное движение

$$T_2 = \frac{m_2 v_{Ay}^2}{2} = 18m_2 r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi.$$

Суммарная кинетическая энергия имеет вид  $T = (\dot{\varphi}^2/2) (A + B \cos^2 \varphi)$ .

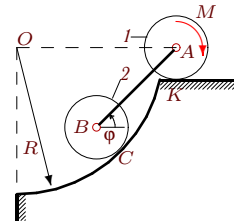
Обобщенная сила

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (M\omega_z + (-m_1 g)v_{By} + (-m_2 g)v_{Ay}) = -3M - 3gr(m_1 + 2m_2) \cos \varphi.$$



**Задача 7**

Оси двух дисков радиусом  $r$  соединены стержнем длиной  $4r$ . Диск  $A$  массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности, другой — массой  $m_2$ , — по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 5r$ . К диску  $A$  приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



**Решение**

Заметим, что по условию задачи треугольник  $OBA$  равнобедренный. Отсюда угол между  $CB$  и осью  $x$  равен  $\pi - \varphi$ . Рассмотрим кинематический граф  $C \xrightarrow{\frac{r}{\pi - \varphi}} B \xrightarrow{\frac{4r}{\varphi}} A$ , где  $C$  — точка касания диска и поверхности, а точки  $O$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой — нормали к общей касательной поверхности и диска. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Cx} - r\omega_{2z} \sin(\pi - \varphi) - 4r\dot{\varphi} \sin \varphi; \\ v_{Ay} &= v_{Cy} + r\omega_{2z} \cos(\pi - \varphi) + 4r\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Cx} = v_{Cy} = v_{Ay} = 0$ , определяем угловую скорость  $\omega_{2z} = 4\dot{\varphi}$  и скорость  $v_{Ax} = -8r\dot{\varphi} \sin \varphi$ . Найдём скорость  $B$ . Составив граф  $B \xrightarrow{\frac{4r}{\varphi}} A$ , получим:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Bx} - 4r\dot{\varphi} \sin \varphi; \\ v_{Ay} &= v_{By} + 4r\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Найдём

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} + 4r\dot{\varphi} \sin \varphi = -4r\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} &= v_{Ay} - 4r\dot{\varphi} \cos \varphi = -4r\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда имеем  $v_B^2 = 16r^2\dot{\varphi}^2$ . Для определения угловой скорости диска  $1$  составим граф  $K \xrightarrow{\frac{r}{\pi/2}} A$ , где  $K$  — точка касания диска с поверхностью. В проекции на ось  $x$ :  $v_{Ax} = v_{Kx} - r\omega_{1z} \sin(\pi/2)$ . Ясно, что  $v_{Kx} = 0$ , поэтому  $\omega_{1z} = 8\dot{\varphi} \sin \varphi$ .

Кинетическая энергия однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, определяется по формуле (I.6):

$$T_1 = \frac{3m_1 v_A^2}{4} = 48m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi, \quad T_2 = \frac{3m_2 v_B^2}{4} = 12m_2 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

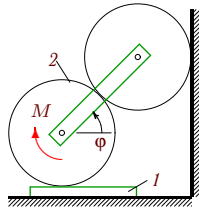
Суммарная кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(A + B \sin^2 \varphi).$$

Обобщенная сила

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(-M\omega_{1z} + (-m_2g)v_{By}) = -8M \sin \varphi + 4grm_2 \cos \varphi.$$

### Задача 8



Оси цилиндров соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по пластинке массой  $m_1$ , скользящей по горизонтальной плоскости. Радиусы цилиндров  $r$ . Масса нижнего цилиндра  $m_2$ . К нижнему цилиндру приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .

### Решение

Рассмотрим кинематический граф (рис. 6)  $A \xrightarrow{\frac{2r}{\varphi}} B$  вдоль спарника  $AB$ . Соответствующие уравнения для проекций скоростей

$$v_{Bx} = v_{Ax} - 2r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_{By} = v_{Ay} + 2r\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

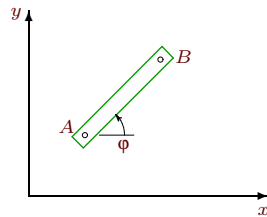


Рис. 6

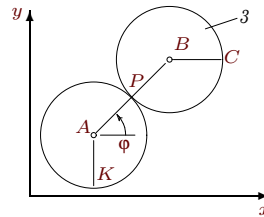


Рис. 7

Учитывая, что  $v_{Ay} = v_{Bx} = 0$ , имеем:  $v_{Ax} = 2r\dot{\varphi} \sin \varphi$ ,  $v_{By} = 2r\dot{\varphi} \cos \varphi$ . Рассмотрим проекции скоростей на ось  $y$  для графа  $B \xrightarrow{\frac{r}{0}} C$  (рис. 7)

$$v_{Cy} = v_{By} + r\omega_{3z} \cos 0.$$

Откуда получаем угловую скорость верхнего цилиндра

$$\omega_{3z} = -2\dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (I.7)$$

Проекция скоростей на ось  $x$  для графа  $K \xrightarrow{\frac{r}{\pi/2}} A \xrightarrow{\frac{2r}{\varphi}} B$ , где  $K$  — точка касания нижнего цилиндра и пластинки (см. рис. 7)

$$v_{Bx} = v_{Kx} - r\omega_{2z} \sin(\pi/2) - 2r\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Найдем скорость поступательного движения пластинки:

$$v_{Kx} = r\omega_{2z} + 2r\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (I.8)$$

Запишем граф по цилиндрам

$$K \xrightarrow{\frac{r}{\pi/2}} A \xrightarrow{\frac{r}{\varphi}} P \xrightarrow{\frac{r}{\varphi}} B,$$

где  $P$  — точка соприкосновения цилиндров. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей

$$v_{Bx} = v_{Kx} - r\omega_{2z} \sin(\pi/2) - r\omega_{2z} \sin \varphi - r\omega_{3z} \sin \varphi,$$

или

$$v_{Kx} = r\omega_{2z} + r\omega_{2z} \sin \varphi + r\omega_{3z} \sin \varphi. \quad (I.9)$$

Из (I.7) — (I.9) следует выражение для угловой скорости нижнего цилиндра  $\omega_{2z} = 2\dot{\varphi}(1 + \cos \varphi)$  и скорость пластинки  $v_{Kx} = 2r\dot{\varphi}(1 + \cos \varphi + \sin \varphi)$ .

Запишем кинетическую энергию плоского движения цилиндра и поступательного движения пластинки:

$$T_1 = \frac{m_1 v_{Kx}^2}{2} = 2m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos \varphi + \sin \varphi)^2;$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_{Ax}^2}{2} + \frac{J_2 \omega_{2z}^2}{2},$$

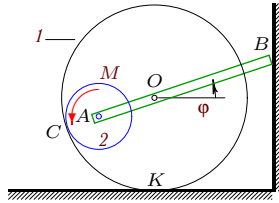
где  $v_{Ax} = 2r\dot{\varphi} \sin \varphi$ ,  $J_2 = m_2 r^2 / 2$ . Суммарная кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin^2 \varphi + C \sin 2\varphi + D \sin \varphi + E \cos \varphi).$$

В выражение обобщенной силы войдет только момент:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (-M \omega_{2z}) = -2M(1 + \cos \varphi).$$

## Задача 9



На оси обода радиусом  $R$ , массой  $m_1$  шарнирно закреплён стержень  $AB$  длиной  $L$ , скользящий одним концом по вертикальной плоскости. На другом конце стержня шарнирно закреплён диск радиусом  $r$ , катящийся по внутренней поверхности обода. К диску приложен момент  $M$ . Качение обода по горизонтальной плоскости происходит без проскальзывания. Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщённую координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Решение**

Найдём кинематические величины, входящие в выражение для кинетической энергии и обобщённой силы. Введём обозначение  $OB = a = L - R + r$ . Составим граф  $O \xrightarrow{\frac{a}{\varphi}} B$ , из которого следует

$$v_{Bx} = v_{Ox} - a\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Получим скорость центра, необходимую для вычисления кинетической энергии обода,

$$v_{Ox} = a\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

В соответствии с графом  $K \xrightarrow{\frac{R}{\pi/2}} O$ , запишем уравнение

$$v_{Ox} = v_{Kx} - R\omega_{1z} \sin(\pi/2),$$

из которого следует выражение для угловой скорости

$$\omega_{1z} = -(a/R)\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Найдём скорость центра диска. Составим граф  $A \xrightarrow{\frac{R-r}{\varphi}} O$  и запишем два уравнения

$$v_{Ox} = v_{Ax} - (R-r)\dot{\varphi} \sin \varphi; \quad v_{Oy} = v_{Ay} + (R-r)\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Получим

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= L\dot{\varphi} \sin \varphi; \\ v_{Ay} &= -(R-r)\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \tag{I.10}$$

Для того, чтобы определить угловую скорость диска 2, необходимо составить граф  $C \xrightarrow[R]{\varphi} O$  и записать соответствующее уравнение в проекции на ось  $x$ :

$$v_{Ox} = v_{Cx} - R\omega_{1z} \sin \varphi.$$

Компонента скорости точки касания обода и диска имеет вид

$$v_{Cx} = a\dot{\varphi} \sin \varphi (1 - \sin \varphi).$$

Из графа  $C \xrightarrow[r]{\varphi} A$  следует уравнение

$$v_{Ax} = v_{Cx} - r\omega_{2z} \sin \varphi,$$

из которого можно найти угловую скорость

$$\omega_{2z} = \dot{\varphi}(a(1 - \sin \varphi) - L)/r. \quad (\text{I.11})$$

Кинетическая энергия плоского движения обода имеет вид

$$T_1 = \frac{m_1 v_O^2}{2} + \frac{J_1 \omega_{1z}^2}{2},$$

где  $J_1 = m_1 R^2$  — момент инерции обода. С учетом выражения для скорости центра получим

$$T_1 = m_1 a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Найдем кинетическую энергию плоского движения диска 2:

$$T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{J_2 \omega_{2z}^2}{2}.$$

Подставим сюда выражение для скорости центра (I.10) и угловой скорости (I.11). Получим

$$T_2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{4} m_2 (2L^2 \sin^2 \varphi + 2(R-r)^2 \cos^2 \varphi + (a(1 - \sin \varphi) - L)^2).$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin^2 \varphi).$$

Обобщенная сила зависит от момента  $M$  и силы тяжести диска 2:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (M\omega_{2z} - m_2 g v_{Ay}) = M(a(1 - \sin \varphi) - L)/r + m_2 g (R - r) \cos \varphi.$$

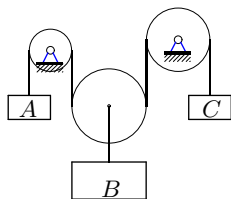
## II СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### Условия задач

В задачах 2.1 – 2.36 механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и движется под действием сил тяжести. Три элемента механизма наделены массами, кратными некоторой массе  $m$ . Трением пренебречь. Подвижные и неподвижные блоки считать однородными цилиндрами. Найти величину ускорения груза  $A$  или центра цилиндра  $A$ .

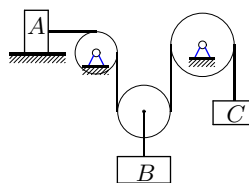
Ответы даны в табл. 2 на с. 89, 90 .

2.1



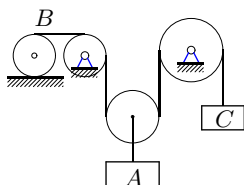
$$m_A = 3m, m_B = 5m, m_C = 4m$$

2.2



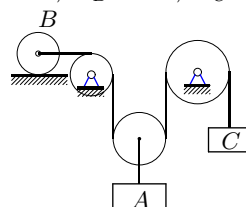
$$m_A = 4m, m_B = 3m, m_C = 3m$$

2.3



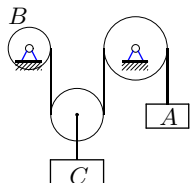
$$m_B = 5m, m_A = 4m, m_C = 4m$$

2.4



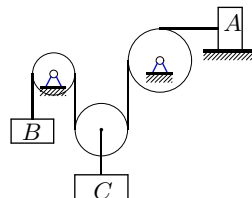
$$m_B = 6m, m_A = 5m, m_C = 4m$$

2.5



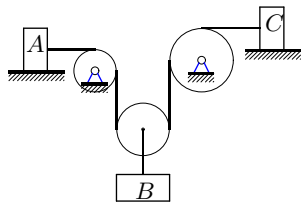
$$m_B = 3m, m_C = 2m, m_A = 3m$$

2.6



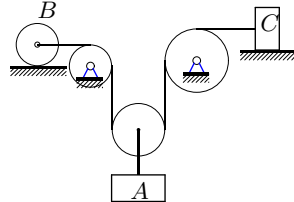
$$m_B = 2m, m_C = 3m, m_A = 5m$$

2.7



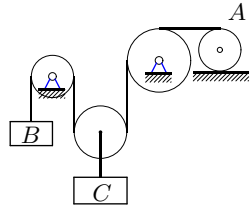
$m_A = 5m, m_B = 4m, m_C = 6m$

2.9



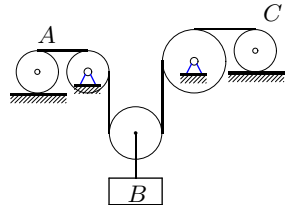
$m_B = 4m, m_A = 3m, m_C = 5m$

2.11



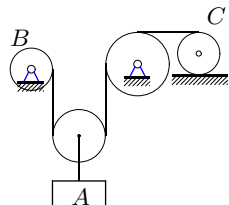
$m_B = 3m, m_C = 5m, m_A = 7m$

2.13



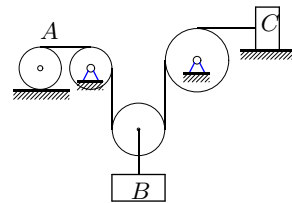
$m_A = 4m, m_B = 3m, m_C = 5m$

2.15



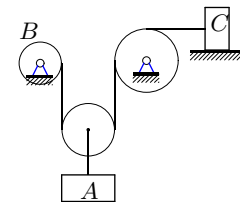
$m_B = 6m, m_A = 5m, m_C = 7m$

2.8



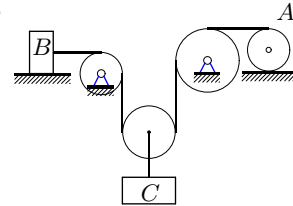
$m_A = 6m, m_B = 5m, m_C = 7m$

2.10



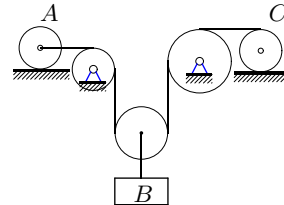
$m_B = 5m, m_A = 4m, m_C = 6m$

2.12



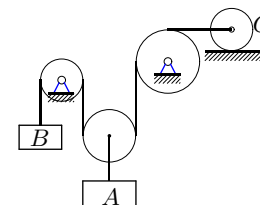
$m_B = 3m, m_C = 2m, m_A = 4m$

2.14



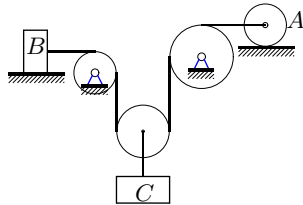
$m_A = 5m, m_B = 4m, m_C = 6m$

2.16



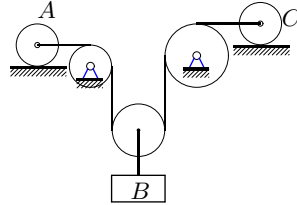
$m_B = 2m, m_A = 2m, m_C = 4m$

2.17



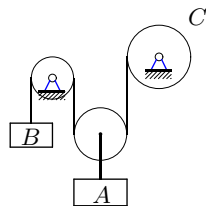
$$m_B = 4m, m_C = 3m, m_A = 5m$$

2.19



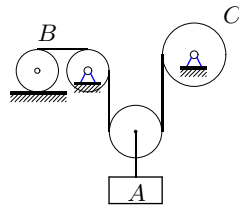
$$m_A = 6m, m_B = 5m, m_C = 7m$$

2.21



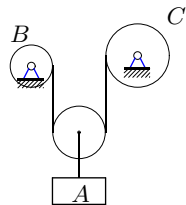
$$m_B = 2m, m_A = 3m, m_C = 5m$$

2.23



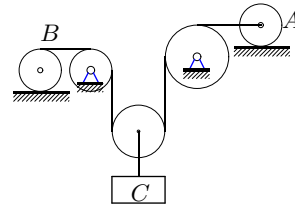
$$m_B = 6m, m_A = 5m, m_C = 7m$$

2.25



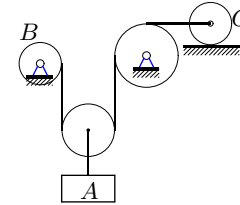
$$m_B = 4m, m_A = 3m, m_C = 5m$$

2.18



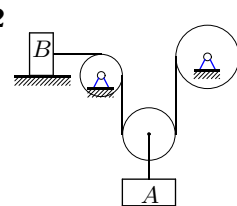
$$m_B = 5m, m_C = 4m, m_A = 6m$$

2.20



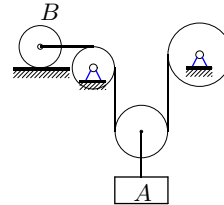
$$m_B = 3m, m_A = 2m, m_C = 4m$$

2.22



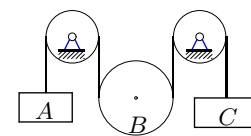
$$m_B = 5m, m_A = 4m, m_C = 6m$$

2.24



$$m_B = 3m, m_A = 2m, m_C = 4m$$

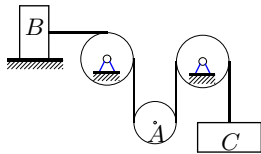
2.26



$$m_A = 3m, m_B = 4m, m_C = 4m$$

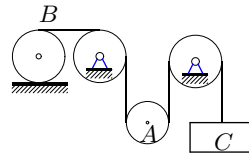


2.27



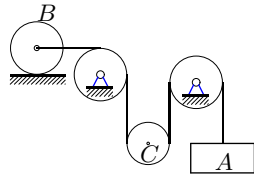
$m_B = 7m, m_A = 5m, m_C = 4m$

2.28



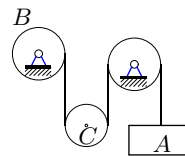
$m_B = 4m, m_A = 2m, m_C = 3m$

2.29



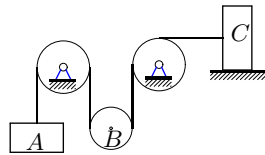
$m_B = 5m, m_C = 3m, m_A = 3m$

2.30



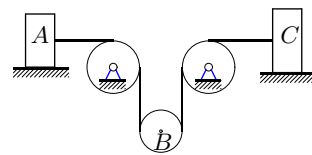
$m_B = 4m, m_C = 2m, m_A = 3m$

2.31



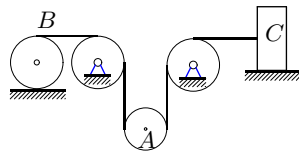
$m_A = 3m, m_B = 5m, m_C = 8m$

2.32



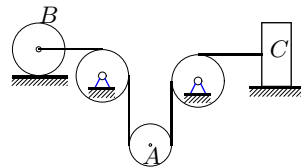
$m_A = 5m, m_B = 3m, m_C = 6m$

2.33



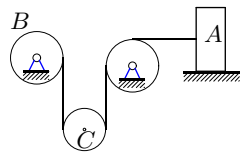
$m_B = 6m, m_A = 4m, m_C = 7m$

2.34



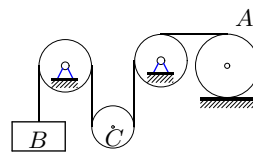
$m_B = 7m, m_A = 5m, m_C = 8m$

2.35



$m_B = 4m, m_C = 2m, m_A = 5m$

2.36

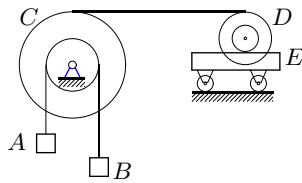


$m_B = 2m, m_C = 3m, m_A = 6m$

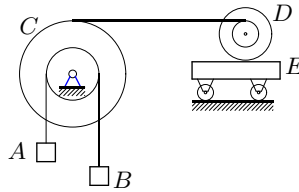
В задачах 2.37 — 2.62 механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из пяти тел. Блок (или однородный цилиндр)  $D$  катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости или по подвижной тележке массой  $m_E$ . Блок состоит из двух соосных жестко скрепленных цилиндров. Массой колес тележки пренебречь. Грузы  $A$ ,  $B$  и ось однородного цилиндра  $E$  перемещаются вертикально под действием сил тяжести. Даны массы  $m_A = 10$  кг,  $m_B = 11$  кг,  $m_C = 12$  кг,  $m_D = 13$  кг,  $m_E = 14$  кг, радиусы  $R_C = 24$  см,  $r_C = 10$  см,  $R_D = 20$  см,  $r_D = 15$  см и радиусы инерции блоков  $\rho_C = 20$  см,  $\rho_D = 24$  см. В тех вариантах, где тело  $D$  — однородный цилиндр, принять  $r_D = 15$  см. Трением качения пренебречь. Найти ускорение груза  $A$ .

Ответы (в  $\text{м/с}^2$ ) даны в табл. 3 на с. 90.

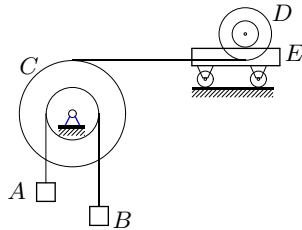
2.37



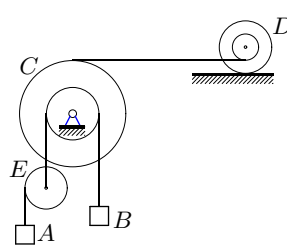
2.38



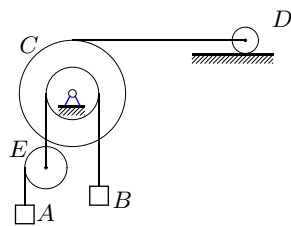
2.39



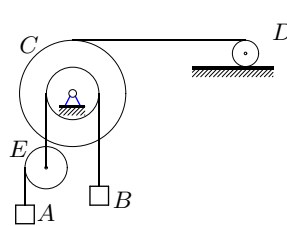
2.40



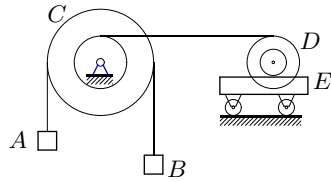
2.41



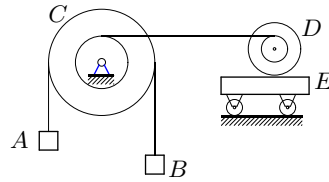
2.42



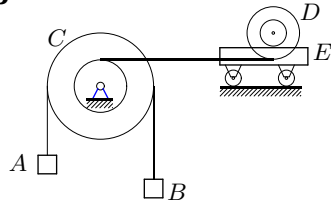
2.43



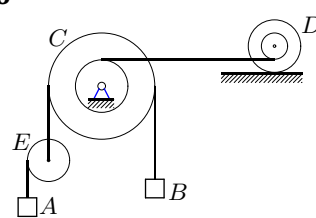
2.44



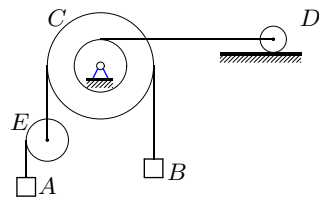
2.45



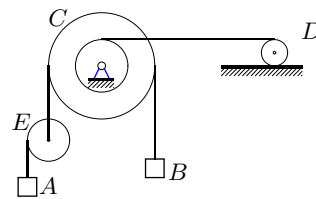
2.46



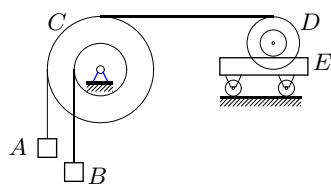
2.47



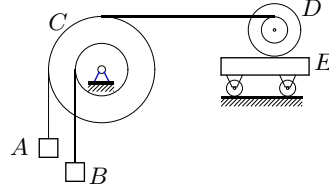
2.48



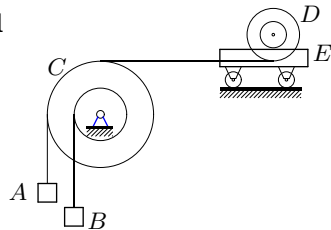
2.49



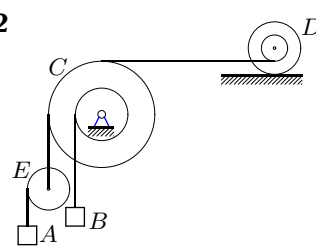
2.50



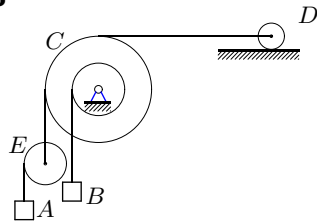
2.51



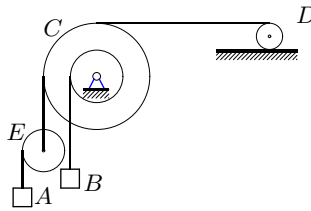
2.52



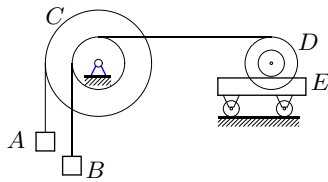
2.53



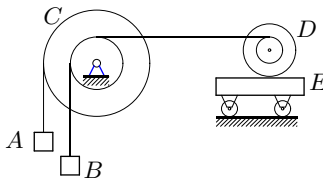
2.54



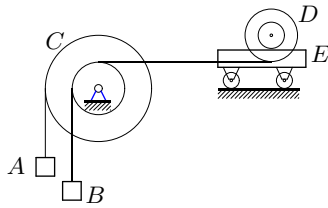
2.55



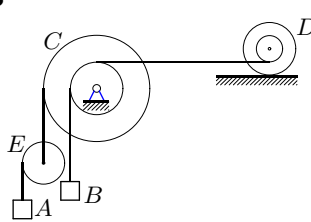
2.56



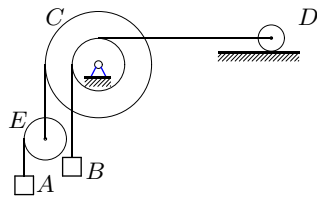
2.57



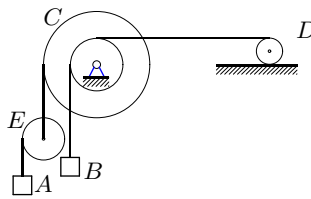
2.58



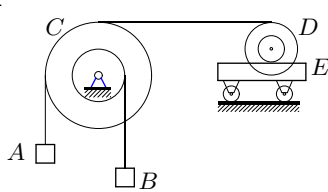
2.59



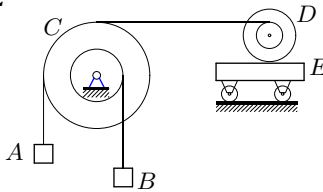
2.60



2.61



2.62



### Примеры решений

**Задача 1.** Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из цилиндра и бруска. К оси однородного цилиндра массой  $m_1$  приложена горизонтальная сила  $F$ . Цилиндр катится по бруску массой  $m_2$ . Трение между бруском и горизонтальным основанием отсутствует (рис. 8). Трением качения пренебречь. Найти ускорение центра масс цилиндра.

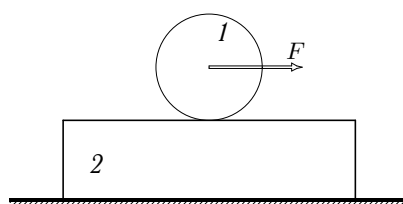


Рис. 8

#### Решение

Выбираем две обобщенные координаты  $q_1 = x_1$  и  $q_2 = x_2$ , и составляем для них систему уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= Q_2. \end{aligned} \tag{II.1}$$

Пусть координата  $x_1$  указывает положение центра цилиндра по отношению к неподвижной системе отсчета, а  $x_2$  — положение бруска относительно той же неподвижной системы отсчета. Направляем оси  $x_2$  и  $x_1$  в сторону движения, т.е. направо (рис.9).

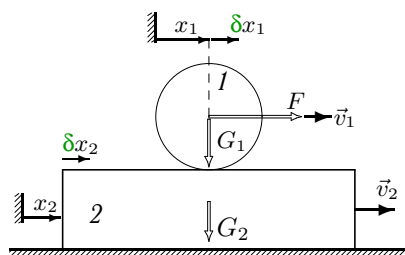


Рис. 9

Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости  $\dot{x}_1 = v_1$  и  $\dot{x}_2 = v_2$ .

Кинетическую энергию всей системы представим в виде суммы кинетических энергий цилиндра и бруска:  $T = T_1 + T_2$ . Находим кинетическую энергию цилиндра, совершающего плоское движение:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{J \omega_1^2}{2}. \quad (\text{II.2})$$

Угловая скорость  $\omega_1$  зависит от разности скоростей центра и точки касания. Так как цилиндр катится по бруску без проскальзывания, скорость точки касания равна скорости бруска  $v_2$ :

$$\omega_1 = |v_1 - v_2|/R.$$

Подставляем в (II.2) момент инерции однородного цилиндра относительно его оси,  $J = m_1 R^2/2$ . В результате получаем выражение для кинетической энергии цилиндра:

$$T_1 = \frac{m_1}{4}(2v_1^2 + (v_1 - v_2)^2).$$

Кинетическая энергия бруска вычисляется по формуле

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Кинетическую энергию всей системы запишем в виде

$$T = \frac{m_1}{4}(2v_1^2 + (v_1 - v_2)^2) + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Обобщенную силу  $Q_1$  вычисляем по формуле  $Q_1 = \delta A_1 / \delta x_1$ , где  $\delta A_1$  — элементарная работа всех сил на перемещении  $\delta x_1$ . При вычислении элементарной работы  $\delta A_1$  на приращении обобщенной координаты  $x_1$  фиксируется другая обобщенная координата, т.е.  $\delta x_2 = 0$ . Очевидно, что кроме силы  $F$  на таком перемещении ни одна сила работы не совершает, следовательно,  $\delta A_1 = F \delta x_1$  и  $Q_1 = F$ . Аналогично вычисляем другую обобщенную силу:  $Q_2 = 0$ .

Записываем уравнения Лагранжа (II.1) и вычисляем входящие в них производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial v_1} &= m_1 v_1 + \frac{m_1}{2}(v_1 - v_2); \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_1} \right) = \frac{3m_1}{2}W_1 - \frac{m_1}{2}W_2, \\ \frac{\partial T}{\partial v_2} &= m_2 v_2 + \frac{m_1}{2}(v_2 - v_1); \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_2} \right) = -\frac{m_1}{2}W_1 + \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) W_2, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \end{aligned}$$

где  $W_1 = \dot{v}_1$ ,  $W_2 = \dot{v}_2$ . Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} 3W_1 m_1 - W_2 m_1 &= 2F, \\ -W_1 m_1 + W_2 (m_1 + 2m_2) &= 0. \end{aligned} \tag{II.3}$$

Решаем систему уравнений (II.3):

$$W_1 = F \frac{m_1 + 2m_2}{m_1(m_1 + 3m_2)}, \quad W_2 = \frac{F}{m_1 + 3m_2}.$$

**Задача 2.** Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из груза  $A$ , скользящего без трения по плоскости, и однородных цилиндров  $B$  и  $C$ . Цилиндр  $C$  падает вертикально вниз и передает движение цилиндру  $B$  и грузу  $A$ , с которыми он связан нерастяжимой нитью. Нить разматывается с цилиндра  $C$ . Даны массы тел  $m_A$ ,  $m_B$ ,  $m_C$  (рис.10). Найти ускорение груза  $A$ .

**Решение**

Выбираем две независимые переменные  $q_1 = x$  и  $q_2 = \varphi$ , однозначно описывающие положение системы (рис.11). Переменная  $x$  указывает положение груза по отношению к неподвижной системе отсчета, а  $\varphi$  — поворот цилиндра  $C$ .

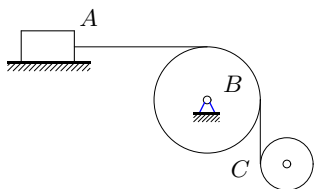


Рис. 10

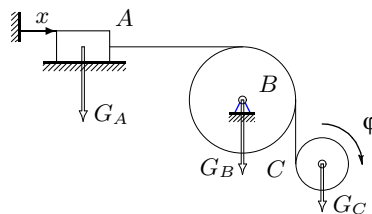


Рис. 11

Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости  $\dot{x}$  и  $\dot{\phi}$ . Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий груза и цилиндров:  $T = T_A + T_B + T_C$ .

Находим кинетическую энергию поступательного движения груза:

$$T_A = \frac{m_A \dot{x}^2}{2}.$$

Кинетическую энергию вращающегося цилиндра запишем в виде

$$T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2} = \frac{m_B R_B^2 (\dot{x}/R_B)^2}{2 \cdot 2} = \frac{m_B \dot{x}^2}{4}.$$

Находим кинетическую энергию цилиндра  $C$ , совершающего плоское движение:

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2}.$$

Угловая скорость цилиндра  $C$  —  $\omega_C = \dot{\phi}$ . Скорость центра масс складывается из переносной скорости  $\dot{x}$  и относительной  $R_C \dot{\phi}$ :

$$T_C = \frac{m_C (\dot{x} + R_C \dot{\phi})^2}{2} + \frac{m_C R_C^2 \dot{\phi}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия всей системы определяется по формуле

$$T = (1/2) \dot{x}^2 (m_A + m_B/2 + m_C) + \dot{x} \dot{\phi} m_C R_C + (3/4) \dot{\phi}^2 m_C R_C^2.$$

Обобщенную силу  $Q_x$  вычисляем по формуле  $Q_x = \delta A_x / \delta x$ , где  $\delta A_x$  — элементарная работа всех сил на перемещении  $\delta x$ . Фиксируем угол поворота цилиндра  $C$ :  $\delta \phi = 0$ . Груз  $A$  перемещается по горизонтали на расстояние  $\delta x$ , цилиндр  $B$  поворачивается на некоторый угол, а цилиндр  $C$  поступательно перемещается вниз на расстояние  $\delta x$ . На этом перемещении работу совершает только сила  $m_C g$ , следовательно,  $\delta A_x = m_C g \delta x$  и  $Q_x = m_C g$ . Аналогично, фиксируя перемещение груза ( $\delta x = 0$ ), даем приращение углу поворота цилиндра  $C$  и вычисляем  $Q_\phi = m_C g R_C$ .



Записываем уравнения Лагранжа (II.1) и вычисляем входящие в них производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \dot{x}(m_A + 0.5m_B + m_C) + \dot{\phi}R_C m_C; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= \ddot{x}(m_A + 0.5m_B + m_C) + \ddot{\phi}R_C m_C; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= \dot{x}R_C m_C + 1.5\dot{\phi}R_C^2 m_C; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = \ddot{x}R_C m_C + 1.5\ddot{\phi}R_C^2 m_C; \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0.\end{aligned}$$

В результате уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\begin{aligned}(m_A + 0.5m_B + m_C)\ddot{x} + m_C R_C \ddot{\phi} &= m_C g, \\ m_C \ddot{x} + 1.5m_C \ddot{\phi} R_C &= m_C g.\end{aligned}\tag{II.4}$$

Решаем систему уравнений (II.4) и находим ускорения:

$$\ddot{x} = \frac{2m_C g}{6m_A + 3m_B + 2m_C}; \quad \ddot{\phi} = \frac{2(2m_A + m_B)g}{R_C(6m_A + 3m_B + 2m_C)}.$$

**Задача 3.** Механическая система состоит из груза  $A$ , бруска  $B$ , блока колес  $C$  и однородных цилиндров  $D$  и  $E$  (рис. 12). Цилиндр  $D$  катится без проскальзывания и без трения качения по бруску, скользящему по гладкой горизонтальной поверхности. Даны массы  $m_A = 0,6$  кг,  $m_B = 25$  кг,  $m_C = 5$  кг,  $m_D = 40$  кг,  $m_E = 16$  кг. Оси цилиндров  $D$  и  $E$  соединены горизонтальным жестким стержнем. Внешний радиус блока  $R_C = 0,5$  м, внутренний  $r_C = 0,3$  м, радиус инерции  $\rho_C = 0,4$  м. Найти ускорение груза  $A$ .

### Решение

Система имеет две степени свободы. Решим задачу с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода <sup>1)</sup>. Выберем обобщенные координаты:  $y$  — вертикальное смещение груза  $A$  и  $s$  — перемещение центральной оси цилиндра  $E$ . Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y};$$

<sup>1)</sup> Другой вариант решения задачи с двумя степенями свободы — с помощью общих уравнений динамики [6].

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = - \frac{\partial \Pi}{\partial s}.$$

Найдем кинетическую энергию системы  $T$ , как функцию обобщенных скоростей  $\dot{y}$  и  $\dot{s}$  и потенциальную  $\Pi$  как функцию обобщенных координат  $y$  и  $s$ . Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы  $T = T_A + T_B + T_C + T_D + T_E$ .

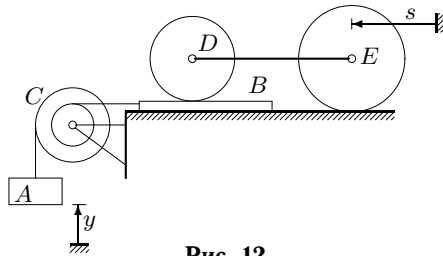


Рис. 12

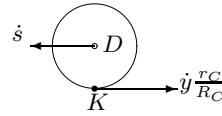


Рис. 13

Определим кинетические энергии груза  $A$  и бруска  $B$ , движущихся поступательно:

$$T_A = \frac{m_A \dot{y}^2}{2}; \quad T_B = \frac{m_B v_B^2}{2},$$

где модуль скорости бруска выразим через модуль угловой скорости блока колес  $C$   $v_B = \omega_C r_C$ . Очевидно,  $\omega_C = \dot{y}/R_C$ , откуда  $v_B = \dot{y} r_C/R_C$ .

Кинетическую энергию вращения блока  $C$  вычисляем по формуле

$$T_C = \frac{J_C \omega_C^2}{2},$$

где  $J_C = m_C \rho_C^2$ .

Находим кинетическую энергию цилиндра  $D$ , совершающего плоское движение:

$$T_D = \frac{m_D v_D^2}{2} + \frac{J_D \omega_D^2}{2}.$$

Угловая скорость  $\omega_D$  зависит от скоростей центра  $D$  и точки касания (рис. 13). Так как стержень, соединяющий цилиндры жесткий, то  $v_D = \dot{s}$ . Цилиндр катится по бруску без проскальзывания, поэтому скорость точки касания  $v_K$  равна скорости бруска  $v_B$ . Составим граф

$K \frac{R_D}{\pi/2} D$ , для которого уравнение для скоростей в проекции на горизонталь имеет вид

$$v_{Dx} = v_{Kx} - R_D \omega_D \sin(\pi/2)$$

или  $-\dot{s} = \dot{y}r_C/R_C - R\omega_D$ , откуда  $\omega_D = (\dot{s} + \dot{y}r_C/R_C)/R_D$ .

Кинетическая энергия цилиндра  $E$  (см. с.33)

$$T_E = \frac{3m_E \dot{s}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия каждого тела с учетом числовых значений имеет вид:

$$T_A = 0, 3\dot{y}^2, T_B = 4, 5\dot{y}^2, T_C = 1, 6\dot{y}^2;$$

$$T_D = 3, 6\dot{y}^2 + 12\dot{y}\dot{s} + 30\dot{s}^2, T_E = 12\dot{s}^2.$$

Запишем суммарную кинетическую энергию механизма:

$$T = 10\dot{y}^2 + 12\dot{y}\dot{s} + 42\dot{s}^2.$$

Потенциальная энергия вычисляется как работа, совершенная силами, приложенными к механизму, на перемещениях, возвращающих обобщенные координаты в условный «нуль». Очевидно, работа силы тяжести  $m_A g$  груза  $A$  на перемещении вниз на расстояние  $y$  равна  $m_A g y$ , а на перемещении  $s$  ни одна сила работы не совершит (силы тяжести цилиндров вертикальны, а перемещение горизонтально). В итоге потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = m_A g y.$$

Запишем уравнения Лагранжа:

$$20\ddot{y} + 12\ddot{s} = -0, 6g;$$

$$12\ddot{y} + 84\ddot{s} = 0.$$

Решая систему двух алгебраических уравнений, находим искомое ускорение  $\ddot{y} = -0, 0328g = -0, 322 \text{ м/с}^2$ . Знак минус в ответе показывает, что ускорение направлено вниз, груз опускается с ускорением.

**Задача 4.** Механическая система состоит из груза  $A$ , однородного цилиндра  $B$ , блока колес  $C$  с неподвижной осью и грузов  $D$  и  $E$  (рис. 14). Ось цилиндра  $B$  соединена с грузом  $E$  тонкой нерастяжимой нитью. На обод цилиндра  $B$  намотана нить, на которой висит груз  $A$ . С внешнего обода блока колес  $C$  свисает груз  $D$ . Даны массы  $m_A = 1 \text{ кг}$ ,  $m_B = 8 \text{ кг}$ ,  $m_C = 3 \text{ кг}$ ,  $m_D = 4 \text{ кг}$ ,

$m_E = 5$  кг. Внешний радиус блока  $R_C = 0,6$  м, внутренний  $r_C = 0,4$  м, радиус инерции  $\rho_C = 0,4$  м. Найти ускорение груза  $A$ .

### Решение

Система имеет две степени свободы. Решим задачу с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода. Выберем обобщенные координаты:  $y$  — вертикальное смещение груза  $A$  и  $s$  — горизонтальное перемещение груза  $E$  (налево). Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} &= Q_s, \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

где  $Q_y$  и  $Q_s$  — обобщенные силы.

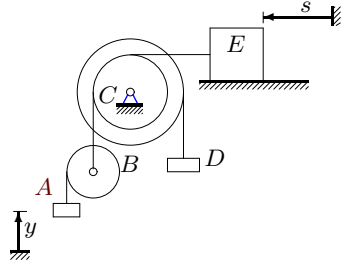


Рис. 14

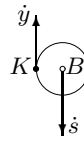


Рис. 15

Найдем кинетическую энергию системы  $T$  как функцию обобщенных скоростей  $\dot{y}$  и  $\dot{s}$ . Кинетическую энергию всей системы представим в виде суммы

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D + T_E.$$

Кинетическая энергия груза определяется по формуле

$$T_A = \frac{m_A \dot{y}^2}{2},$$

а кинетическая энергия цилиндра  $B$ , совершающего плоское движение:

$$T_B = \frac{m_B v_B^2}{2} + \frac{J_B \omega_B^2}{2},$$

где скорость центра масс равна скорости груза  $E$ :  $v_B = \dot{s}$ . Момент инерции однородного цилиндра радиусом  $r_B$ :  $J_B = m_B r_B^2 / 2$ . Чтобы

найти угловую скорость  $\omega_B$ , необходимо использовать кинематический граф  $K \xrightarrow{r_B} B$ , составленный по цилиндру  $B$  от точки обода до центра, из которого следует уравнение для скоростей в проекцию на вертикаль (рис. 15)

$$v_{By} = v_{Ky} + r_B \omega_{Bz} \cos \theta,$$

или  $-\dot{s} = \dot{y} + r_B \omega_B$ , откуда  $\omega_{Bz} = -(\dot{s} + \dot{y})/r_B$ .

Найдем кинетическую энергию вращения блока колес  $C$

$$T_C = \frac{J_C \omega_C^2}{2},$$

где  $J_C = m_C \rho_C^2$ ,  $\omega_C = \dot{s}/r_C$ .

Кинетическая энергия груза  $D$  имеет вид

$$T_D = \frac{m_D v_D^2}{2},$$

где модуль скорости

$$v_D = \omega_C R_C = \dot{s} R_C / r_C. \quad (\text{II.6})$$

Вычислим кинетическую энергию груза  $E$ :

$$T_E = \frac{m_E \dot{s}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия каждого тела с учетом числовых значений имеет вид:

$$\begin{aligned} T_A &= 0, 5\dot{y}^2; & T_B &= 4\dot{s}^2 + 2(\dot{y} + \dot{s})^2; & T_C &= 3\dot{s}^2/2; \\ T_D &= 9\dot{s}^2/2; & T_E &= 5\dot{s}^2/2. \end{aligned}$$

Запишем суммарную кинетическую энергию механизма

$$T = 2, 5\dot{y}^2 + 4\dot{y}\dot{s} + 14, 5\dot{s}^2. \quad (\text{II.7})$$

Обобщенные силы будем вычислять как коэффициенты при приращениях соответствующих обобщенных координат в выражении для элементарной работы на этом приращении. Даем приращение  $\delta y$  (координата  $s$  при этом фиксируется, следовательно, тела  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  неподвижны, и силы, приложенные к ним, работы не совершают). Получим

$$\delta A_y = -m_A g \delta y,$$

отсюда  $Q_y = -m_A g$ . Аналогично фиксируем координату  $y$  (груз  $A$  неподвижен) и даем приращение  $\delta s$ . Ось цилиндра  $B$  опустится, и

сила тяжести совершит положительную работу  $\delta A = m_B g \delta s$ . Груз  $D$  поднимется на высоту  $\delta s R_C / r_C$ , которую легко вычислить, используя выражение для скорости (II.6). В итоге,

$$\delta A_s = m_B g \delta s - m_D g \delta s R_C / r_C.$$

Подставим кинетическую энергию (II.7) и обобщенные силы  $Q_y$  и  $Q_s$  в уравнения Лагранжа (II.5). Учитывая независимость кинетической энергии от обобщенных координат

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = 0,$$

получаем

$$5\ddot{y} + 4\ddot{s} = -g;$$

$$4\ddot{y} + 29\ddot{s} = 2g.$$

Решая систему двух алгебраических уравнений, находим ускорения  $\ddot{y} = -(37/129)g = -2,814 \text{ м/с}^2$ ,  $\ddot{s} = (14/129)g = 1,065 \text{ м/с}^2$ . Здесь  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Ускорение груза  $A$  меньше нуля, следовательно, согласно выбранному направлению обобщенной координаты (вверх), ускорение груза направлено вниз.

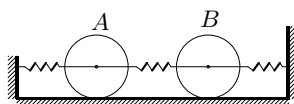
### III КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

#### Условия задач

В задачах 3.1 — 3.30 механическая система с двумя степенями свободы состоит из двух однородных цилиндров и нескольких линейно упругих пружин с одинаковой жесткостью  $c$ . Цилиндры катаются без проскальзывания и сопротивления по горизонтальной поверхности, пружины в положении равновесия не имеют предварительного напряжения. Массой пружин пренебречь. Определить частоты собственных колебаний системы.

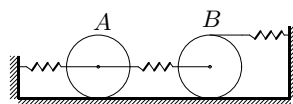
Ответы приведены в табл.4 на с. 91.

**3.1**



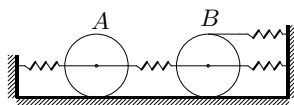
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 1 \text{ Н/м}$$

**3.2**



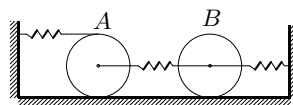
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 2 \text{ Н/м}$$

**3.3**



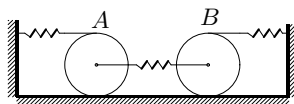
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 6 \text{ Н/м}$$

**3.4**



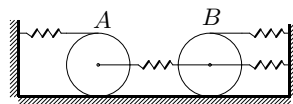
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 9 \text{ кг}, c = 8 \text{ Н/м}$$

**3.5**



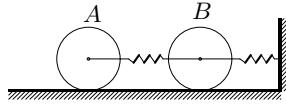
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 8 \text{ Н/м}$$

**3.6**



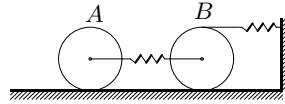
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 7 \text{ Н/м}$$

3.7



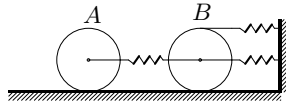
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 10 \text{ Н/м}$$

3.8



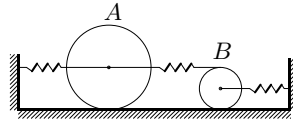
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 11 \text{ Н/м}$$

3.9



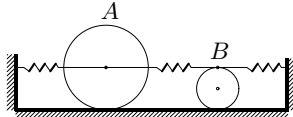
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 12 \text{ Н/м}$$

3.10



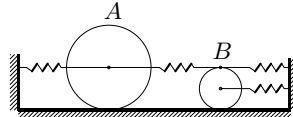
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 11 \text{ Н/м}$$

3.11



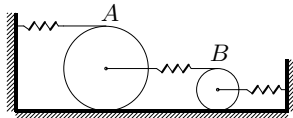
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 11 \text{ Н/м}$$

3.12



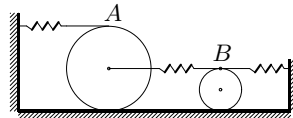
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 13 \text{ Н/м}$$

3.13



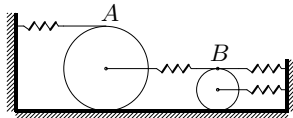
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 14 \text{ Н/м}$$

3.14



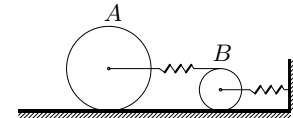
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 5 \text{ кг}, c = 16 \text{ Н/м}$$

3.15



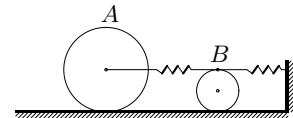
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 5 \text{ кг}, c = 17 \text{ Н/м}$$

3.16



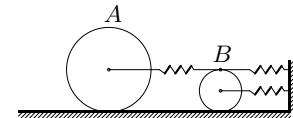
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 9 \text{ кг}, c = 20 \text{ Н/м}$$

3.17



$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 17 \text{ Н/м}$$

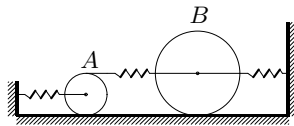
3.18



$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 9 \text{ кг}, c = 22 \text{ Н/м}$$

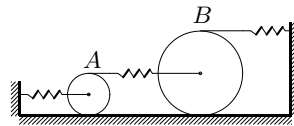


3.19



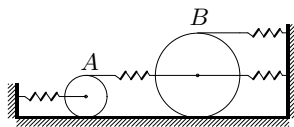
$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 20 \text{ Н/м}$

3.20



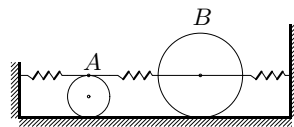
$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 5 \text{ кг}, c = 22 \text{ Н/м}$

3.21



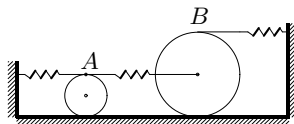
$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 9 \text{ кг}, c = 25 \text{ Н/м}$

3.22



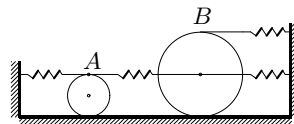
$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 25 \text{ Н/м}$

3.23



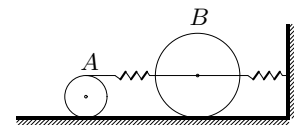
$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 23 \text{ Н/м}$

3.24



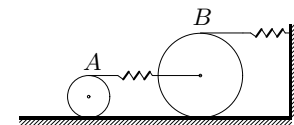
$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 25 \text{ Н/м}$

3.25



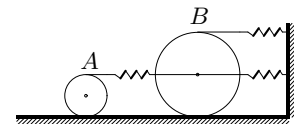
$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 25 \text{ Н/м}$

3.26



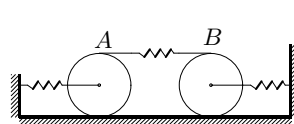
$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 27 \text{ Н/м}$

3.27



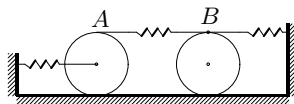
$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 28 \text{ Н/м}$

3.28



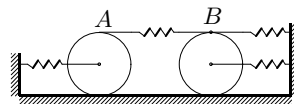
$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 29 \text{ Н/м}$

3.29



$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 30 \text{ Н/м}$

3.30



$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 30 \text{ Н/м}$

### Пример решения

**Задача.** Механическая система с двумя степенями свободы состоит из двух однородных цилиндров и двух линейно упругих пружин. Цилиндр  $A$  массой  $m_A = 50$  кг может кататься без проскальзывания и трения качения по горизонтальной поверхности. Его ось соединена с неподвижной стенкой горизонтальной пружиной 1. Ободы

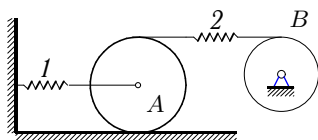


Рис. 16

цилиндров связаны нитью и пружиной 2. Цилиндр  $B$  массой  $m_B = 20$  кг вращается вокруг неподвижной оси. Жесткость пружин, работающих и на сжатие и на растяжение, одинакова:  $c = 90$  Н/м. Массой пружин

пренебречь. Найти частоты собственных колебаний системы.

Задачу решим двумя способами. Различие между ними состоит в выборе обобщенных координат и форме вычисления обобщенных сил в уравнении Лагранжа.

#### 1-й способ

В качестве обобщенных координат выбираем удлинения пружин (рис. 17). Связи предполагаем идеальными и их реакции на рисунке не показываем.

Кинетическую энергию системы, состоящую из суммы кинетических энергий двух тел:  $T = T_A + T_B$ , выражаем через обобщенные скорости  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ . Кинетическая энергия однородного цилиндра  $A$ , катящегося без проскальзывания по неподвижной плоскости, вычисляется по формуле

$$T_A = (3/4)m_A\dot{x}_1^2. \quad (\text{III.1})$$

Кинетическая энергия вращения цилиндра  $B$  вокруг неподвижной оси имеет вид  $T_B = J_B\omega_B^2/2$ , где  $J_B = m_B R_B^2/2$ .

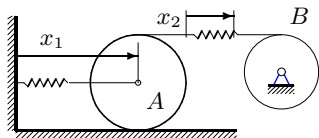


Рис. 17

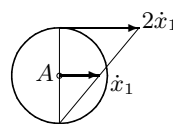


Рис. 18

Левый конец пружины 2 движется со скоростью  $2\dot{x}_1$  (рис. 18), скорость удлинения пружины  $\dot{x}_2$ . Скорость правого конца пружины равна скорости точки обода цилиндра  $B$  и равна сумме  $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$ , отсюда  $\omega_B = (2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)/R_B$  — угловая скорость вращения цилиндра  $B$ . Таким образом, получаем:  $T_B = m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2/4$ . Кинетическая энергия всей системы

$$T = (3/4)m_A\dot{x}_1^2 + (1/4)m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2.$$

Для того, чтобы вычислить обобщенную силу  $Q_1$ , даем возможное перемещение (удлинение)  $\delta x_1$  пружине 1, фиксируя удлинение пружины 2, или заменяя пружину 2 нерастяжимой нитью (рис. 19).

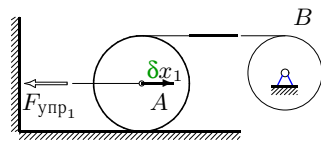


Рис. 19

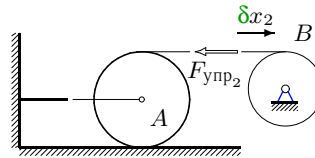


Рис. 20

Воспользуемся формулой  $Q_1 = \delta A_1 / \delta x_1$ , где  $\delta A_1 = -F_{упр1} \delta x_1$ . Так как  $F_{упр1} = cx_1$ , то  $Q_1 = -cx_1$ . Аналогично, фиксируя удлинение пружины 1, растягиваем пружину 2 на  $\delta x_2$  (рис. 20) и вычисляем элементарную работу  $\delta A_2 = -F_{упр2} \delta x_2$ . Отсюда  $Q_2 = -cx_2$ .

Записываем систему уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= Q_2. \end{aligned}$$

Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= 1.5m_A\dot{x}_1 + m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2); & \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= 0.5m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2); & \frac{\partial T}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\begin{aligned} (2m_B + 1.5m_A)\ddot{x}_1 + m_B\ddot{x}_2 &= -cx_1; \\ m_B\ddot{x}_1 + 0.5m_B\ddot{x}_2 &= -cx_2. \end{aligned} \tag{III.2}$$

Записываем (III.2) в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Инерционные коэффициенты для данного примера имеют вид:

$$a_{11} = 2m_B + 1.5m_A; \quad a_{12} = a_{21} = m_B; \quad a_{22} = 0.5m_B.$$

Коэффициенты жесткости системы  $c_{11} = c_{22} = c$ ,  $c_{12} = c_{21} = 0$ . Коэффициенты жесткости и инерционные коэффициенты образуют симметричные матрицы. Предполагая, что каждая обобщенная координата меняется по закону гармонических колебаний, решение системы (III.3) ищем в форме

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_0), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_0),$$

где  $A_1, A_2, \omega, \beta_0$  — неизвестные постоянные. Система (III.2) после сокращения на  $\sin(\omega t + \beta_0)$  принимает вид

$$\begin{aligned} (c - (2m_B + 1.5m_A)\omega^2)A_1 - m_B\omega^2 A_2 &= 0, \\ -m_B\omega^2 A_1 + (c - 0.5m_B\omega^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Из условия существования нетривиального решения этой системы для  $A_1$  и  $A_2$  получаем уравнение частот:

$$\frac{3}{4}m_A m_B \omega^4 - \frac{3m_A + 5m_B}{2}c\omega^2 + c^2 = 0. \quad (\text{III.5})$$

Подставляем числовые данные задачи, решаем биквадратное уравнение (III.5) и находим две частоты собственных колебаний системы:  $\omega_1 = 0,871$  рад/с,  $\omega_2 = 3,774$  рад/с.

## 2-й способ

В качестве первой обобщенной координаты выбираем смещение  $x$  цилиндра  $A$ , а в качестве другой — угол поворота  $\phi$  цилиндра  $B$  (рис. 21). Таким образом,  $q_1 = x$ ,  $q_2 = \phi$ .

Кинетическую энергию системы, состоящую из суммы кинетических энергий двух тел,  $T = T_A + T_B$ , выражаем через обобщенные скорости  $\dot{x}$  и  $\dot{\phi}$ . Кинетическая энергия цилиндра  $A$  вычисляется так же, как и в 1-м способе по формуле (III.1):  $T_A = 3m_A \dot{x}^2/4$ . Кинетическая энергия вращения цилиндра  $B$  примет вид

$$T_B = J_B \dot{\phi}^2/2 = m_B \dot{\phi}^2 R_B^2/4.$$

Кинетическая энергия всей системы  $T = (3/4)m_A\dot{x}^2 + m_B\dot{\phi}^2 R_B^2/4$ . Для того, чтобы вычислить обобщенные силы, находим потенциальную энергию системы. Силы тяжести работу не совершают, поэтому вся потенциальная энергия содержится в пружинах. Удлинение первой пружины равно  $x$ . Левый конец пружины 2 смещается на  $2x$ , правый — на  $R_B\phi$  в ту же сторону (рис. 22).

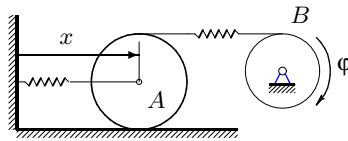


Рис. 21

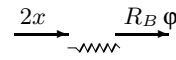


Рис. 22

Удлинение второй пружины равно по модулю  $|2x - R_B\phi|$ . Потенциальная энергия пружин, не имеющих предварительного напряжения, имеет вид

$$\Pi = \frac{c}{2}x^2 + \frac{c}{2}(2x - R_B\phi)^2.$$

Обобщенные силы вычисляем по формулам:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -c(5x - 2R_B\phi); \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = -cR_B(R_B\phi - 2x).$$

Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= 1.5 m_A \dot{x}; & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= 0.5 m_B R_B^2 \dot{\phi}; & \frac{\partial T}{\partial \phi} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\begin{aligned} 1.5 m_A \ddot{x} &= -c(5x - 2R_B\phi); \\ 0.5 m_B R_B^2 \ddot{\phi} &= -cR_B(R_B\phi - 2x). \end{aligned} \tag{III.6}$$

Записываем (III.6) в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы (III.3). Инерционные коэффициенты для данного примера имеют вид:  $a_{11} = 1.5 m_A$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0$ ,  $a_{22} = 0.5 m_B R_B^2$ . Коэффициенты жесткости:  $c_{11} = 5c$ ,  $c_{12} = c_{21} = -2cR_B$ ,  $c_{22} = cR_B^2$ . Решение системы (III.3) ищем в форме гармонических колебаний:  $x = A_1 \sin(\omega t + \beta_0)$ ,  $\phi = A_2 \sin(\omega t + \beta_0)$ , где  $A_1, A_2, \omega, \beta_0$  —

неизвестные постоянные. Система (III.6) после сокращения на общий множитель  $\sin(\omega t + \beta_0)$  принимает вид

$$\begin{aligned} (5c - 1.5m_A \omega^2)A_1 - 2cR_B A_2 &= 0, \\ -2cA_1 + R_B(c - 0.5m_B \omega^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Для неизвестных амплитуд колебаний  $A_1$  и  $A_2$  система (III.7) является однородной. Из условия существования нетривиального решения приравняем нулю определитель системы и получаем уравнение частот, в точности совпадающее с (III.5). Таким образом, с другим набором обобщенных координат находим те же частоты:

$$\omega_{1,2}^2 = (75 \pm 3\sqrt{505})/10,$$

или  $\omega_1 = 0.871$  рад/с,  $\omega_2 = 3.774$  рад/с.

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение задачи равносильно отысканию собственных значений матрицы  $A^{-1}C$ , где  $A$  и  $C$  — матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Действительно, представим (III.3) в виде  $A\ddot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0$ , где  $\vec{x} = \{x_1, x_2\}$ . Умножив это уравнение на обратную матрицу  $A^{-1}$ , получаем, что  $\ddot{\vec{x}} + A^{-1}C\vec{x} = 0$ . Решение ищем в форме гармонических колебаний, записываем систему однородных линейных уравнений для амплитуд колебаний, определитель которой имеет вид  $\det(-\omega^2 E + A^{-1}C)$ , где  $E$  — единичная матрица.

Таким образом, квадраты частот равны собственным значениям матрицы  $A^{-1}C$  ([5], §2.10). Напомним, собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $B$  являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

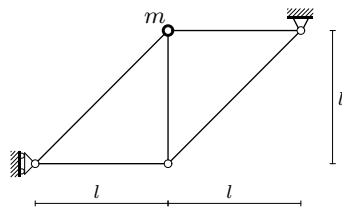
## IV КОЛЕБАНИЯ УЗЛА ФЕРМЫ

### Условия задач

В задачах 4.1 — 4.30 в одном из шарниров плоской фермы находится точка с массой  $m$ . Стержни фермы упругие. Жесткость стержней  $EF$ ;  $l = 1$  м. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней и опор, определить частоты собственных малых колебаний шарнира фермы.

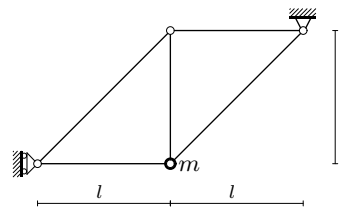
Ответы даны в табл. 5 на с. 92.

**4.1**



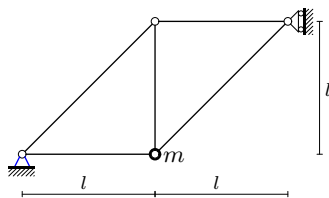
$$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 4 \text{ кг}$$

**4.2**



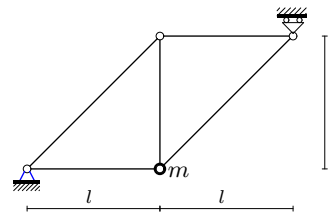
$$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 49 \text{ кг}$$

**4.3**



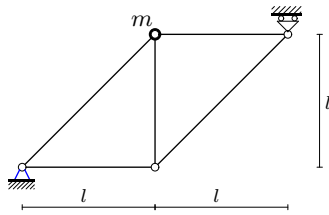
$$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 16 \text{ кг}$$

**4.4**



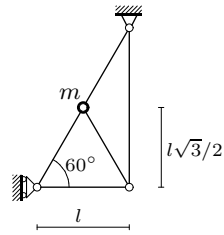
$$EF = 0,4 \text{ кН}, m = 49 \text{ кг}$$

4.5



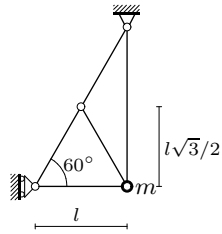
$$EF = 0,4 \text{ кН}, m = 9 \text{ кг}$$

4.6



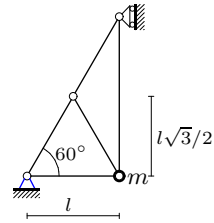
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

4.7



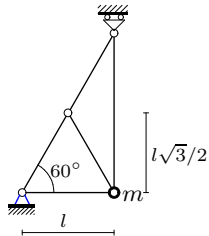
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 25 \text{ кг}$$

4.8



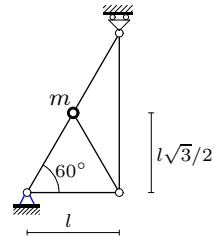
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

4.9



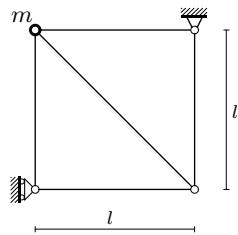
$$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$$

4.10



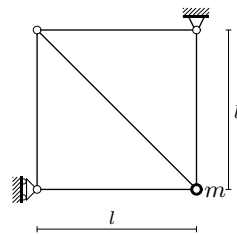
$$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 16 \text{ кг}$$

4.11



$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 25 \text{ кг}$$

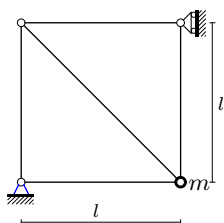
4.12



$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

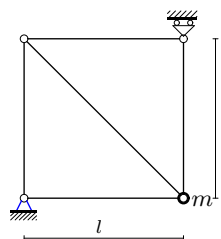


4.13



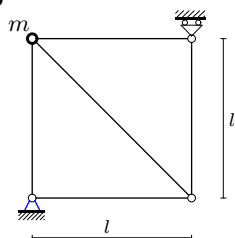
$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

4.14



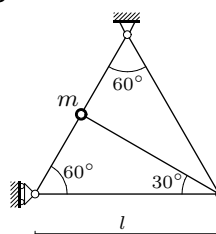
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

4.15



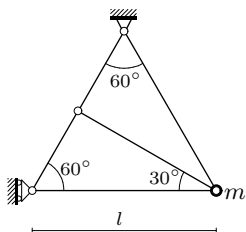
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 49 \text{ кг}$$

4.16



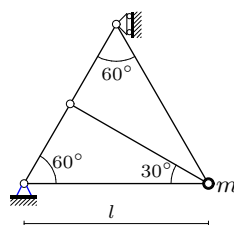
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 4 \text{ кг}$$

4.17



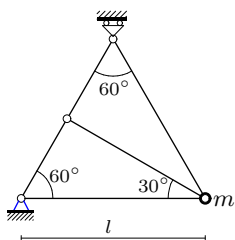
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 25 \text{ кг}$$

4.18



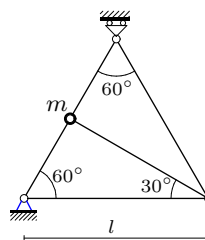
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

4.19



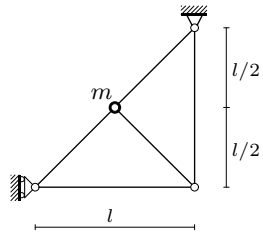
$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

4.20



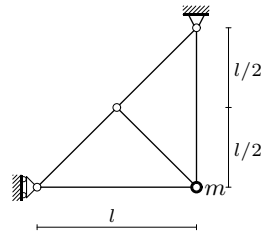
$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

4.21



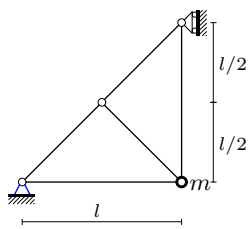
$$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

4.22



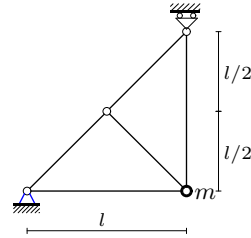
$$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 4 \text{ кг}$$

4.23



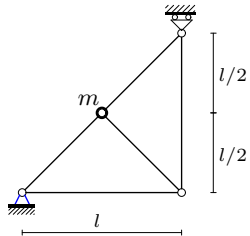
$$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 25 \text{ кг}$$

4.24



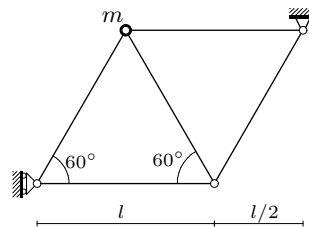
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$$

4.25



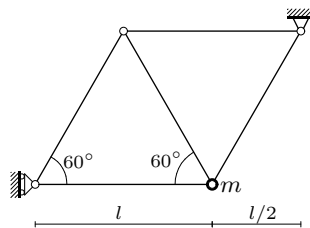
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$$

4.26



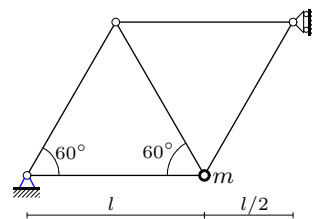
$$EF = 6,4 \text{ кН}, m = 16 \text{ кг}$$

4.27



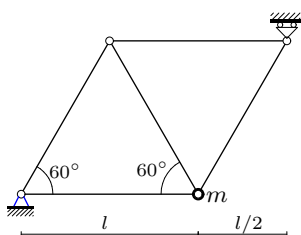
$$EF = 6,4 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

4.28



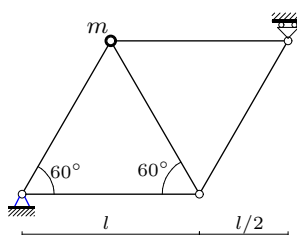
$$EF = 6,4 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$$

4.29



$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 64 \text{ кг}$

4.30



$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$

### Пример решения

**Задача.** В шарнире  $C$  плоской фермы находится точка с массой  $m = 9 \text{ кг}$  (рис. 23). Материал стержней имеет модуль упругости  $E$ , площадь сечения стержней  $F$ , жесткость всех стержней фермы одинакова,  $EF = 0,1 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ . Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, шарниров и подвижной опоры, определить частоты собственных малых колебаний шарнира  $C$ .

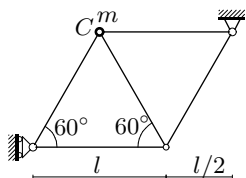


Рис. 23

С учетом упругости стержней система имеет две степени свободы. Основные уравнения задачи следуют из уравнения Лагранжа 2-го рода. В качестве обобщенных координат принимаем горизонтальные и вертикальные перемещения узла  $x_1$  и  $x_2$ . Предполагая, что упругие силы линейно зависят от перемещений, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода в матричном виде:

$$A\ddot{\vec{x}} + C\dot{\vec{x}} = 0, \tag{IV.1}$$

где  $A$  — матрица инерции,  $C$  — матрица жесткости. Матрица обратная  $C$  — матрица податливости  $B = C^{-1}$ , коэффициенты которой

(перемещения от единичных сил) вычисляем по формуле Максвелла–Мора [13]:

$$b_{ij} = b_{ji} = \sum_{k=1}^n S_{i,k} S_{j,k} \frac{l_k}{EF}, \quad i, j = 1, 2, \quad (\text{IV.2})$$

где  $l_k$  — длины стержней,  $E$  и  $F$  — модуль упругости и площадь поперечного сечения стержней,  $S_{i,k}$  — безразмерное усилие в стержне с номером  $k$  от действия единичной горизонтальной ( $i = 1$ ) или вертикальной ( $i = 2$ ) нагрузки на шарнир с массой. Произведение  $EF$  называют жесткостью, в данной задаче она считается одинаковой для всех стержней фермы. Коэффициенты  $b_{ij}$  имеют простой физический смысл:  $b_{ij}$  — это перемещение узла в направлении  $i$  под действием единичной силы, действующей в направлении  $j$ . Измеряются  $b_{ij}$  в м/Н. По теореме взаимности Бетти <sup>1)</sup>  $b_{ij} = b_{ji}$ .

Кинетическая энергия точки имеет вид  $T = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2$ , следовательно, матрица инерции является диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Умножая (IV.1) на  $B$  и делая подстановку  $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$ , что равносильно замене

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_0),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_0),$$

где  $A_1, A_2$  — амплитуды,  $\omega$  — частота,  $\beta_0$  — начальная фаза колебаний, получаем однородную систему

$$m\omega^2 B\vec{x} - \vec{x} = 0,$$

имеющую ненулевое решение в том случае, если ее определитель равен нулю. Следовательно, задача свелась к поиску собственных значений матрицы  $B$ .

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. К шарниру, наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу. Определяем усилия в стержнях  $S_{1,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , где  $n$  — число стержней фермы.

<sup>1)</sup> Энрико Бетти (1823 — 1892) — итальянский математик.

2. Прикладываем к этому же шарниру единичную вертикальную силу. Определяем усилия в стержнях  $S_{2,k}$ .

3. Используя формулу Максвелла–Мора (IV.2), вычисляем коэффициенты податливости  $b_{ij}$ . Записываем их в симметричную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $B$ .

5. Находим частоты собственных колебаний

$$\omega_k = 1/\sqrt{m\lambda_k}, \quad k = 1, 2.$$

**Решение**

1. К шарниру  $C$ , наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу (рис. 24). Находим реакции опор  $X_A, X_B, Y_B$  от единичной силы. Составляем для этого три уравнения равновесия фермы как жесткого целого:

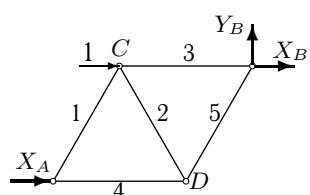


Рис. 24

$$\begin{aligned} X_A + X_B + 1 &= 0; \\ Y_B &= 0; \\ X_A l \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Очевидное решение системы:  $X_A = 0, Y_B = 0, X_B = -1$ . Методом вырезания узлов<sup>1)</sup> определяем усилия в стержнях (рис. 25 – 27). Рассматриваем равновесие узла, прикладывая к нему внешние силы (если таковые имеются) и усилия отброшенных стержней, направляя

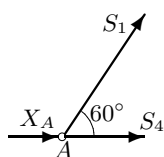


Рис. 25

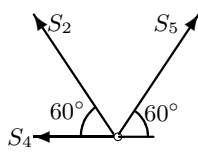


Рис. 26

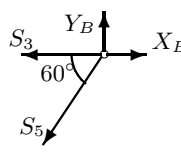


Рис. 27

векторы усилий по стержню из узла к стержню. Номера стержней указаны на рис. 24.

<sup>1)</sup> Не менее эффективно использовать Риттера или метод сечений [6].

Равновесие узла  $A$  (см. рис. 25):

$$\begin{aligned} X_A + S_1 \cos 60^\circ + S_4 &= 0; \\ S_1 \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Равновесие узла  $D$  (см. рис. 26):

$$\begin{aligned} -S_2 \cos 60^\circ + S_5 \cos 60^\circ - S_4 &= 0; \\ S_2 \sin 60^\circ + S_5 \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Равновесие узла  $B$  (см. рис. 27):

$$\begin{aligned} X_B - S_3 - S_5 \cos 60^\circ &= 0; \\ Y_B - S_5 \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Последовательно решая системы (IV.4 – IV.6), получаем  $S_{1,1} = S_{1,2} = S_{1,4} = S_{1,5} = 0, S_{1,3} = -1$ . В обозначении для ответов  $S_{1,k}$  первый индекс указывает направление приложенной единичной силы. Индекс  $l$  соответствует горизонтальной единичной силе,  $2$  – вертикальной силе. Второй индекс – номер стержня.

2. К шарниру  $C$  прикладываем единичную вертикальную силу (рис. 28). Находим реакции опор от единичной силы. Составляем для этого уравнения равновесия фермы в целом (проекции на оси и сумма моментов относительно точки  $B$ ):

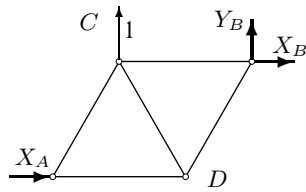


Рис. 28

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= 0; \\ Y_B + 1 &= 0; \\ X_A l \sin 60^\circ - 1 \cdot l &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Пользуясь теми же уравнениями (IV.4 – IV.6), но с реакциями опор вычисленными из (7), определяем усилия в стержнях:  $S_{2,1} = 0; S_{2,2} = 1,155; S_{2,3} = -0,577; S_{2,4} = S_{2,5} = -1,155$ .

3. По формуле Максвелла–Мора (IV.2) находим коэффициенты податливости  $b_{ij}$ . Промежуточные результаты заносим в таблицу:

$k$	$S_{1,k}$	$S_{2,k}$	$l_k$	$l_k S_{1,k}^2$	$l_k S_{1,k} S_{2,k}$	$l_k S_{2,k}^2$
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1,155	1	0	0	1,333
3	-1	-0,577	1	1	0,577	0,333
4	0	-1,155	1	0	0	1,333
5	0	-1,155	1	0	0	1,333
$\sum_{k=1}^5$				1,000	0,577	4,333

Суммируем три последних столбца, получаем три коэффициента податливости, отнесенные к жесткости  $EF$ :  $b_{11} = 1,000/(EF)$ ,  $b_{12} = b_{21} = 0,577/(EF)$ ,  $b_{22} = 4,333/(EF)$ , и записываем их в виде симметричной матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,00577 \\ 0,00577 & 0,04333 \end{bmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $B$ . Приравниваем нулю определитель

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Решая квадратное уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(b_{11} + b_{22}) + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0,$$

определяем собственные значения:

$$\lambda_1 = 0,044305, \quad \lambda_2 = 0,009028.$$

5. Находим частоты собственных колебаний (круговые частоты):

$$\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1} = 1,584 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2} = 3,508 \text{ рад/с}.$$

## V

### ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЧАСТОТЫ СИСТЕМЫ

#### Условия задач

Механическая система с двумя степенями свободы состоит из связанных между собой цилиндров, грузов и двух линейно упругих пружин с одинаковой жесткостью  $c_1$  и  $c_2$ . Три элемента механизма наделены массами, кратными некоторой массе  $m$ . Трением пренебречь. Подвижные и неподвижные блоки считать однородными цилиндрами. Массой пружин пренебречь. Определить собственные и предельные частоты колебаний системы.

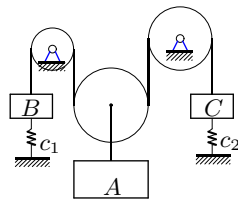
Под предельными частотами механической системы с двумя степенями свободы, состоящей из  $n$  тел с массами  $m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , будем понимать отличные от нуля пределы

$$\omega_{\infty k} = \lim_{m_k \rightarrow \infty} \omega_{1,2},$$

где  $\omega_{1,2}$  — первая или вторая собственная частота. Те массы, для которых существует предельная частота называются предельными <sup>1)</sup>.

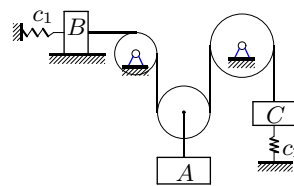
Ответы приведены в табл. 6 на с. 93.

#### 5.1



$m_B=3$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_2=3$  Н/м,  $c_1=2$  Н/м

#### 5.2

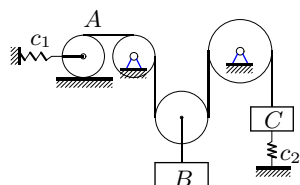


$m_B=6$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=2$  Н/м

<sup>1)</sup> Существуют также маятниковые частоты для системы, содержащей гироскопические силы  $A\ddot{q} + g\Gamma\dot{q} + Kq = 0$ . Они получаются как предельные значения собственных частот при  $g \rightarrow \infty$ . См. [4, с. 193].

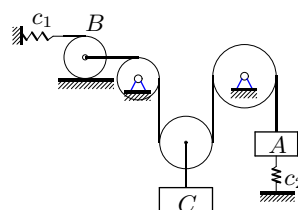


5.3



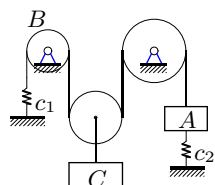
$m_A=4$  кг,  $m_B=3$  кг,  $m_C=3$  кг,  
 $c_1=4$  Н/м,  $c_2=1$  Н/м

5.4



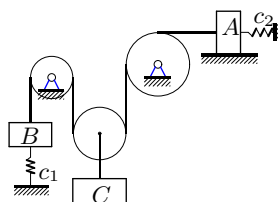
$m_B=4$  кг,  $m_C=3$  кг,  $m_A=3$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=3$  Н/м

5.5



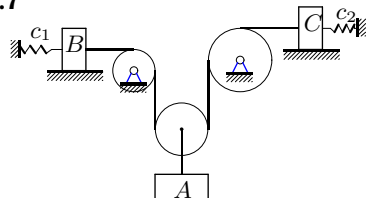
$m_B=6$  кг,  $m_C=5$  кг,  $m_A=4$  кг,  
 $c_2=8$  Н/м,  $c_1=3$  Н/м

5.6



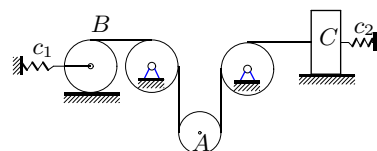
$m_B=2$  кг,  $m_C=2$  кг,  $m_A=4$  кг,  
 $c_1=1$  Н/м,  $c_2=4$  Н/м

5.7



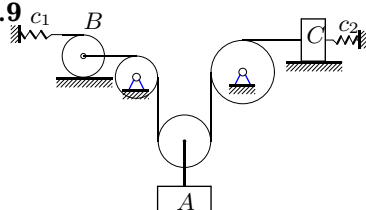
$m_B=6$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=3$  Н/м

5.8



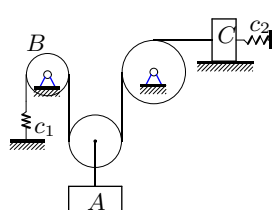
$m_B=4$  кг,  $m_A=2$  кг,  $m_C=5$  кг,  
 $c_1=3$  Н/м,  $c_2=4$  Н/м

5.9



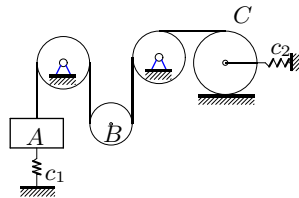
$m_B=6$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=7$  Н/м,  $c_1=3$  Н/м

5.10



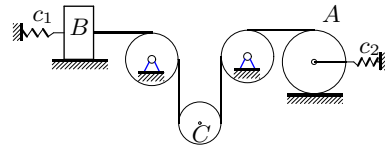
$m_B=6$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=8$  Н/м,  $c_1=2$  Н/м

5.11



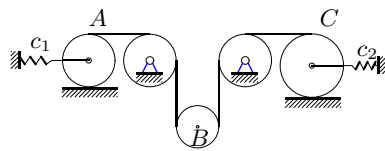
$m_A=3$  кг,  $m_B=5$  кг,  $m_C=8$  кг,  
 $c_2=4$  Н/м,  $c_1=5$  Н/м

5.12



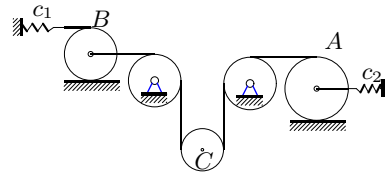
$m_B=5$  кг,  $m_C=3$  кг,  $m_A=6$  кг,  
 $c_1=3$  Н/м,  $c_2=6$  Н/м

5.13



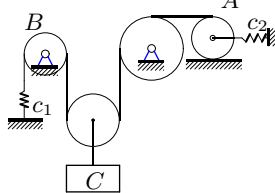
$m_A=7$  кг,  $m_B=5$  кг,  $m_C=8$  кг,  
 $c_2=6$  Н/м,  $c_1=4$  Н/м

5.14



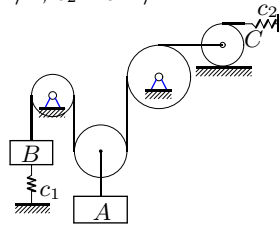
$m_B=5$  кг,  $m_C=3$  кг,  $m_A=6$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=6$  Н/м

5.15



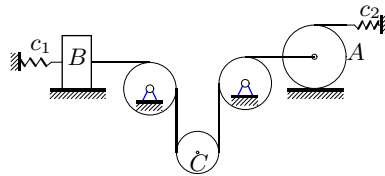
$m_B=3$  кг,  $m_C=2$  кг,  $m_A=4$  кг,  
 $c_1=6$  Н/м,  $c_2=5$  Н/м

5.16



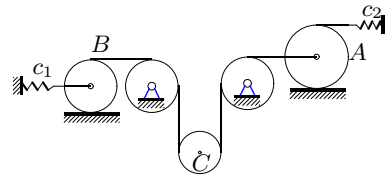
$m_B=3$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=6$  кг,  
 $c_2=3$  Н/м,  $c_1=5$  Н/м

5.17



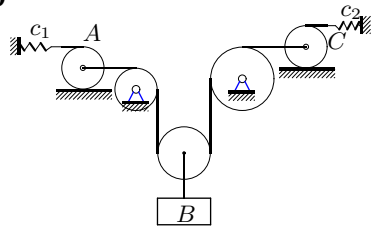
$m_B=7$  кг,  $m_C=5$  кг,  $m_A=8$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=7$  Н/м

5.18



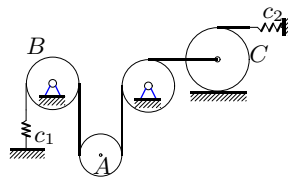
$m_B=5$  кг,  $m_C=3$  кг,  $m_A=6$  кг,  
 $c_1=4$  Н/м,  $c_2=7$  Н/м

5.19



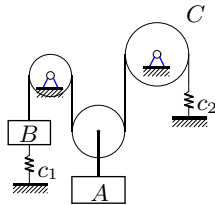
$m_A=3$  кг,  $m_B=2$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=4$  Н/м

5.20



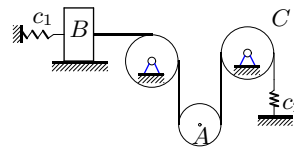
$m_B=5$  кг,  $m_A=3$  кг,  $m_C=6$  кг,  
 $c_1=6$  Н/м,  $c_2=5$  Н/м

5.21



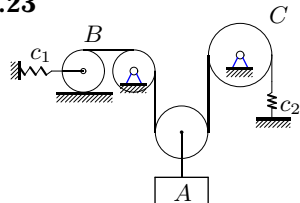
$m_B=3$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=4$  Н/м,  $c_1=7$  Н/м

5.22



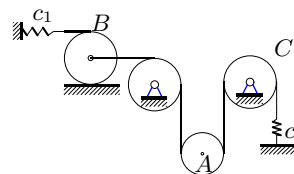
$m_B=4$  кг,  $m_A=2$  кг,  $m_C=5$  кг,  
 $c_1=2$  Н/м,  $c_2=8$  Н/м

5.23



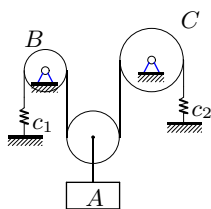
$m_B=5$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=6$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=7$  Н/м

5.24



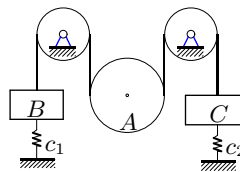
$m_B=6$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=6$  Н/м,  $c_1=8$  Н/м

5.25



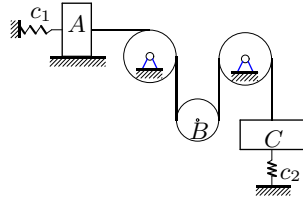
$m_B=3$  кг,  $m_A=2$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=6$  Н/м

5.26



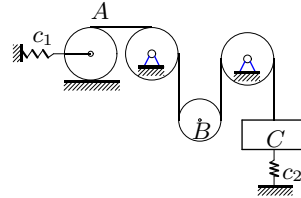
$m_B=3$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_2=3$  Н/м,  $c_1=4$  Н/м

5.27



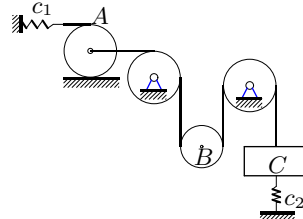
$m_A=4$  кг,  $m_B=2$  кг,  $m_C=3$  кг,  
 $c_1=3$  Н/м,  $c_2=2$  Н/м

5.28



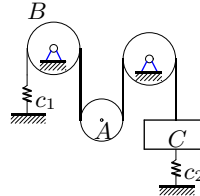
$m_A=6$  кг,  $m_B=4$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=2$  Н/м

5.29



$m_A=4$  кг,  $m_B=2$  кг,  $m_C=3$  кг,  
 $c_1=4$  Н/м,  $c_2=2$  Н/м

5.30



$m_B=4$  кг,  $m_A=2$  кг,  $m_C=3$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=2$  Н/м

### Пример решения

**Задача.** Механическая система состоит из однородных цилиндров 1, 2, масса которых  $m_1 = 3$  кг,  $m_2 = 8$  кг и бруска массой  $m_3 = 2$  кг (рис. 29). Цилиндр 2 катится без проскальзывания по бруску.

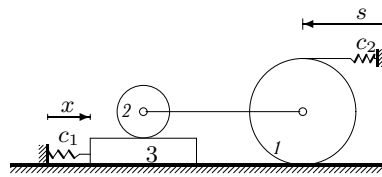


Рис. 29

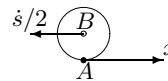


Рис. 30

Брусок скользит без сопротивления по плоскости. Жесткости  $c_1, c_2$  пружин одинаковы и равны  $c = 1$  Н/м. Найти собственные и предельные частоты системы.

**Решение**

Выбираем обобщенные координаты. Пусть  $s$  — удлинение одной пружины,  $x$  — удлинение другой (перемещение бруска 3).

Вычисляем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости  $\dot{x}$  и  $\dot{s}$ . Кинетическая энергия поступательного движения бруска  $T = m_3 \dot{x}^2 / 2$ . Однородный цилиндр 1, катящийся по поверхности, имеет энергию (см. (1.6) на с. 33)

$$T = \frac{3}{4} m_1 v_1^2,$$

где скорость центра цилиндра вдвое меньше скорости верхней точки его обода (см. рис. 2 на с. 31)  $v_1 = \dot{s}/2$ . Кинетическая энергия плоского движения цилиндра 2

$$T = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega_2^2,$$

где скорость центра цилиндра 2 в силу жесткости соединительного стержня равна скорости центра цилиндра 1 и  $v_2 = v_1 = \dot{s}/2$ . Момент инерции цилиндра  $J_0 = m_2 R^2 / 2$ . Угловую скорость  $\omega_2$  найдем, связав скорость точки A обода цилиндра 2 и скорость его центра B (рис. 30)

графом  $A \xrightarrow{\frac{R}{\pi/2}} B$ . Из уравнения графа для скоростей в проекции на ось  $x$  имеем  $v_{Bx} = v_{Ax} - R\omega_2 \sin(\pi/2)$  или  $-\dot{s}/2 = \dot{x} - R\omega_2$  откуда  $\omega_2 = (\dot{s}/2 + \dot{x})/R$ . Кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{3}{4} m_1 \left(\frac{\dot{s}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\dot{s}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} m_2 R^2 \left(\frac{\dot{s}/2 + \dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2.$$

Потенциальная энергия пружин определяется выражением

$$\Pi = cs^2/2 + cx^2/2.$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = - \frac{\partial \Pi}{\partial s}.$$

Подставляем в эти уравнения выражения кинетической и потенциальной энергии и получаем:

$$a_{11} \ddot{x} + a_{12} \ddot{s} = -cx;$$

$$a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{s} = -cs,$$

где  $a_{11} = m_2/2 + m_3$ ,  $a_{12} = a_{21} = m_2/4$ ,  $a_{22} = 3/8(m_1 + m_2)$ .

Делая подстановку  $x = A \sin \omega t$ ,  $s = B \sin \omega t$ , что равносильно формальной замене  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ,  $\ddot{s} = -\omega^2 s$ , из условия равенства нулю определителя системы для коэффициентов  $A$  и  $B$

$$\begin{vmatrix} c - \omega^2 a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & c - \omega^2 a_{22} \end{vmatrix}$$

получаем частотное уравнение

$$\omega^4(3m_3m_1 + 3m_3m_2 + m_2^2 + 1.5m_1m_2) - \omega^2(3m_1 + 7m_2 + 8m_3) + 8 = 0.$$

Решая уравнение, находим квадраты собственных частот  $\omega_{1,2}^2 =$

$$= \frac{3m_1 + 7m_2 + 8m_3 \pm \sqrt{9m_1^2 + 17m_2^2 + 64m_3^2 + 16m_3m_2 - 6m_2m_1 - 48m_3m_1}}{6m_3m_1 + 6m_3m_2 + 2m_2^2 + 3m_1m_2},$$

где  $\omega_1$  — большая частота (взят знак +),  $\omega_2$  — меньшая.

Находим предельные частоты:

$$\omega_{\infty 1,1} = \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \omega_1 = \sqrt{\frac{2}{m_2 + 2m_3}},$$

$$\omega_{\infty 3,1} = \lim_{m_3 \rightarrow \infty} \omega_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{6}{m_1 + m_2}}.$$

Все остальные пределы не дают предельных частот:

$$\omega_{\infty 2,1} = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \omega_1 = 0,$$

$$\omega_{\infty 1,2} = \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \omega_2 = \omega_{\infty 2,2} = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \omega_2 = \omega_{\infty 3,2} = \lim_{m_3 \rightarrow \infty} \omega_2 = 0.$$

Подставляя числовые значения, получаем собственные  $\omega_1 = 0,592 \frac{1}{c}$ ,  $\omega_2 = 0,371 \frac{1}{c}$  и предельные частоты  $\omega_{\infty 1,1} = 0,408 \frac{1}{c}$ ,  $\omega_{\infty 3,1} = 0,492 \frac{1}{c}$ .

Предельными в данной системе будут массы 1 и 3. Если увеличить поочередно каждую из этих масс до бесконечности, что фактически соответствует наложению связей на соответствующие тела, то система будет иметь одну степень свободы и будет совершать колебания. Наложение связей на тело 2 приводит к полной остановке механизма. Масса 2 не является предельной. Таким образом, предельный анализ собственных частот системы позволяет качественно оценить вклад каждого тела в колебательное движение системы.

## Предметный и именной указатель

- Амплитуда колебаний, 70, 76
- Бетти Э., 76
- Гармонические колебания, 69
- Гироскопические силы, 80
- Граф, 30
- Жесткость, 76
- Журавлев В.Ф., 80, 94
- Колебания гармонические, 69
- Координаты обобщенные, 34, 66
- Коэффициенты
- жесткости, 68
  - инерционные, 68
  - податливости, 77
- Максвелла–Мора формула, 76
- Матрица
- жесткости, 75
  - инерции, 75
  - податливости, 75
- Маятниковые частоты, 80
- Метод
- МЦС, 31
  - Риттера, 77
  - графов, 30, 31
  - координатный, 31
- Модуль упругости, 76
- Момент инерции
- обода, 45
  - стержня, 33
  - цилиндра, 54, 60
- Моноцикл, 4, 44
- Мощность, 33
- Обобщенные
- координаты, 34, 66
  - силы, 69
- скорости, 54
- Полюс, 30
- Потенциальная энергия пружины, 69
- Предельные
- массы, 80
  - частоты, 80
- Радиус инерции, 57
- Решebник, 94
- Риттер, 77
- Связь
- идеальная, 66
  - стационарная, 33
- Силы
- гироскопические, 80
  - обобщенные, 33
- Скорости обобщенные, 54
- Собственные значения, 70, 76
- Тарг С.М., 94
- Теорема взаимности Бетти, 76
- Уравнение частот, 68, 70, 86
- Уравнения
- Лагранжа 2-го рода, 69, 85
- Фаза колебаний начальная, 76
- Формула
- Максвелла–Мора, 76
  - вычисления обобщенных сил, 69
- Частота
- круговая, 79
  - маятниковая, 80
  - предельная, 80
  - собственная, 68, 71, 86
- Частотное уравнение, 68, 70, 86