Лекция К1.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1. Способы задания движения точки в заданной системе отсчета

Основными задачами кинематики точки являются:

1.Описание способов задания движения точки.

2.Определение кинематических характеристик движения точки (скорости, ускорения) по заданному закону движения.

Механическое движение – **изменение положения одного тела относительно другого** (тела отсчета), с которым связана система координат, называемая **системой отсчета**.

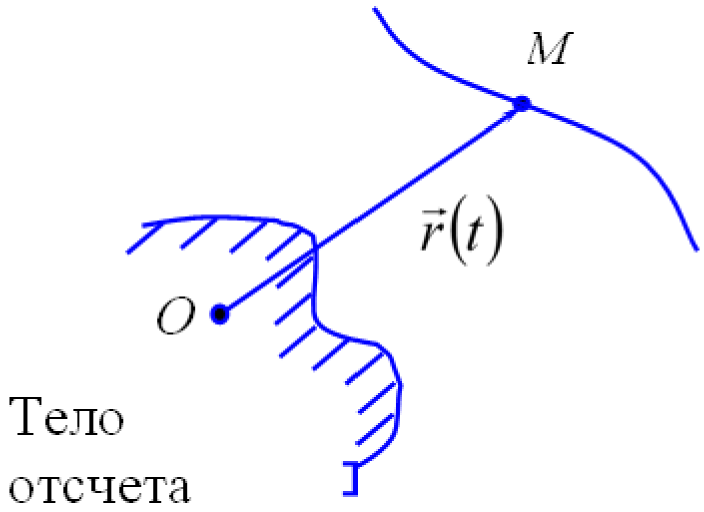
Геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета называется **траектория** точки.

Задать движение – это дать способ, с помощью которого можно определить положение точки в любой момент времени по отношению к выбранной системе отсчета. К основным способам задания движения точки относятся:

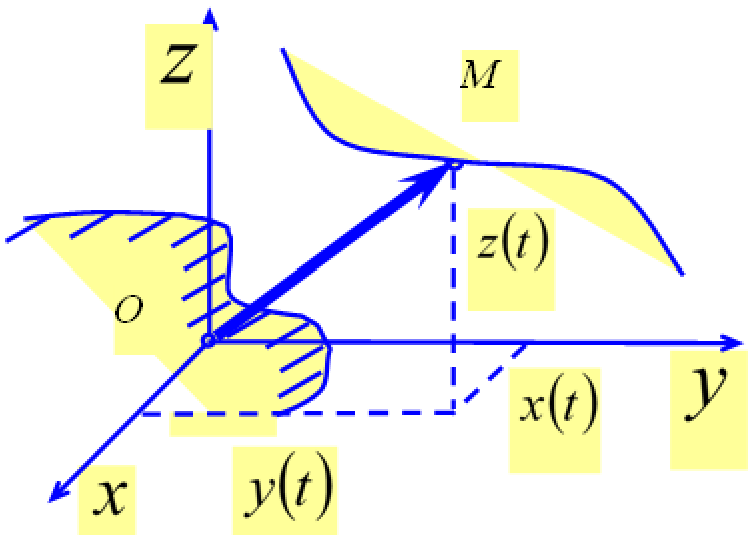
векторный, координатный и естественный.

1.<u>Векторный способ задания движения </u>(рис. 1).

Положение точки определяется радиус-вектором, проведенным из неподвижной точки, связанной с телом отсчета: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – векторное уравнение движения точки.



2.Координатный способ задания движения (рис. 2).



В этом случае задаются координаты точки как функции времени:

$$x = x\quad t\quad , y = y\quad t\quad , z = z\quad t\quad ;$$

– уравнения движения точки в координатной форме.

Это и параметрические уравнения траектории движущейся точки, в которых роль параметра играет время t. Чтобы записать ее уравнение в явной форме, надо исключить из них t. В случае пространственной траектории, исключив t, получим:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

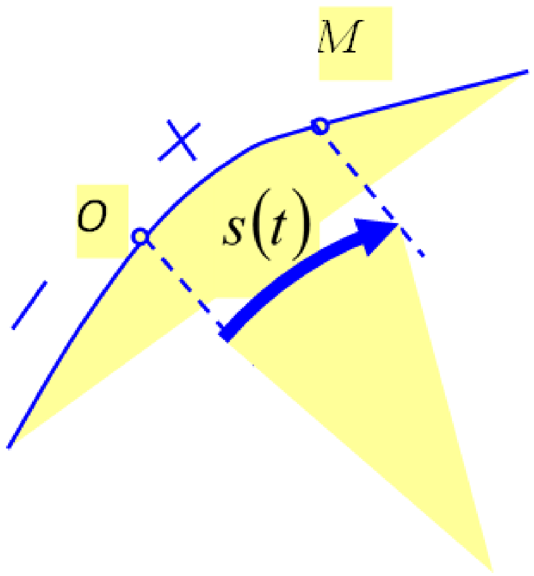
В случае плоской траектории

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

исключив t, получим:

$$F(x, y) = 0$$ или $$y = \varphi(x)$$.

3. **Естественный способ задания движения** (рис. 3).



В этом случае задаются:

1)траектория точки,

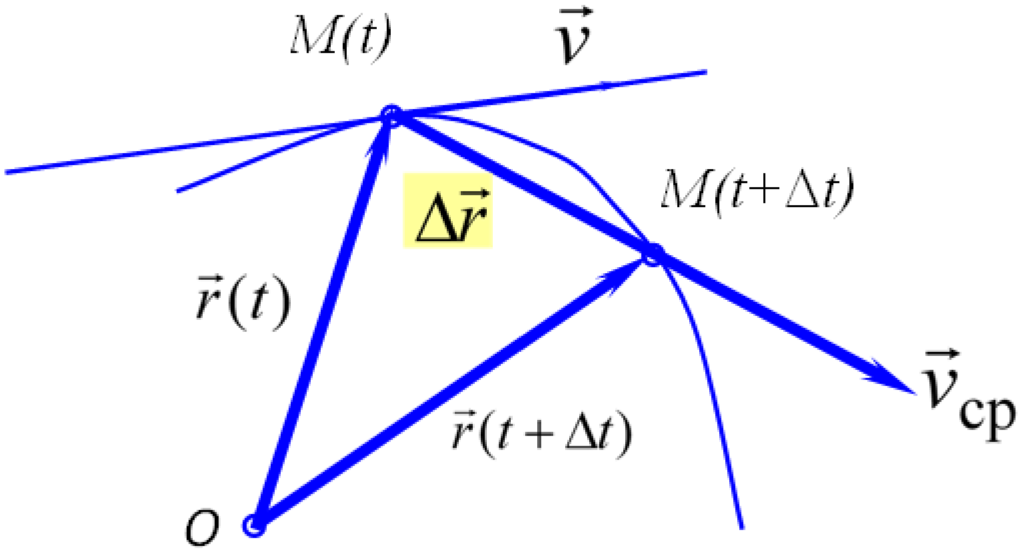
2)начало отсчета на траектории,

3) положительное направление отсчета,

4)закон изменения дуговой координаты: $s = s(t)$.

Этим способом удобно пользоваться, когда траектория точки заранее известна.

2. Скорость и ускорение точки



Рассмотрим перемещение точки за малый промежуток времени Δt (рис. 4):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t).$$

Тогда $\vec{v}_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ – средняя скорость точки за промежуток времени Δt.

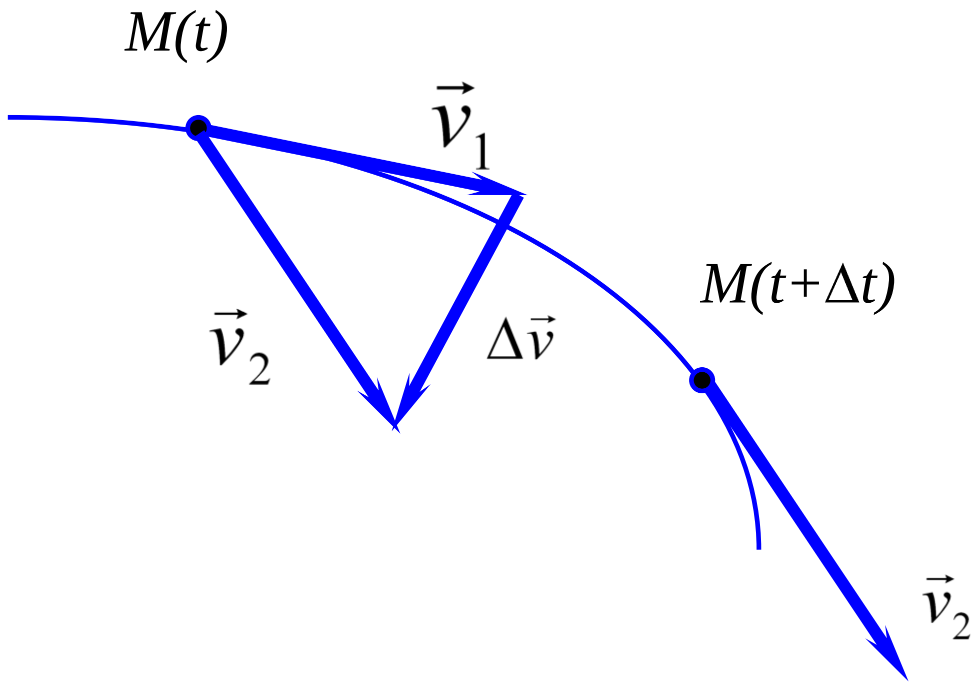
Скорость точки в данный момент времени находится как предел средней скорости при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Скорость точки – это кинематическая мера ее движения, равная **производной по времени от радиус-вектора этой точки** в рассматриваемой системе отсчета.

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Среднее ускорение $\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ характеризует изменение вектора скорости за малый промежуток времени Δt (рис. 5).

Ускорение точки в данный момент времени находится как предел среднего ускорения при

$\Delta t \to 0$:

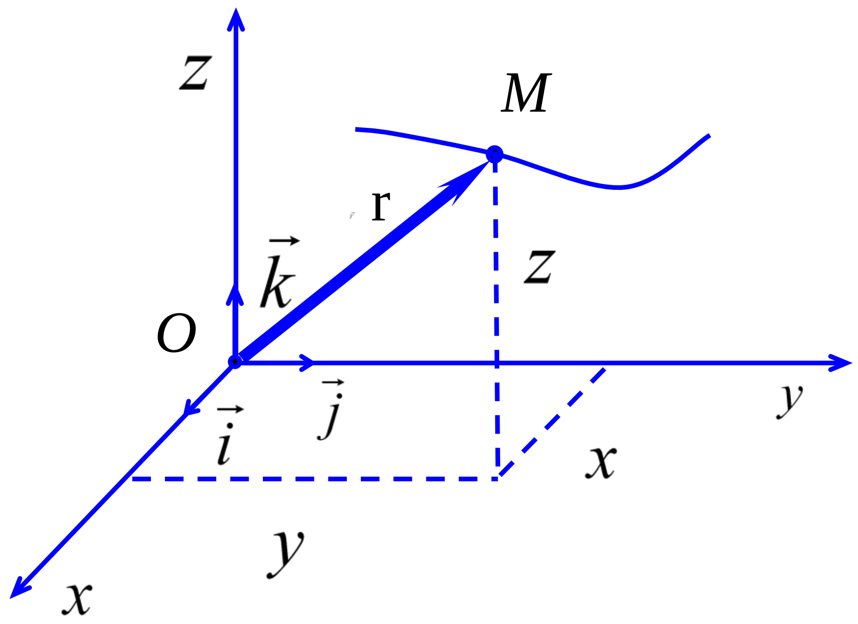
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Ускорение точки – это мера изменения ее скорости, равная производной **по времени от скорости этой точки или второй производной от радиус-вектора точки по времени**.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}.$$

Ускорение точки характеризует изменение вектора скорости по величине и направлению. Вектор ускорения направлен в сторону вогнутости траектории.

3. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения



Связь векторного способа задания движения и координатного дается соотношением

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (рис. 6).

Из определения скорости:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

Проекции скорости на оси координат равны производным соответствующих координат по времени

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Модуль и направление скорости определяются выражениями:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos\left(\vec{v}, \vec{i}\right) = \frac{v_x}{v} \qquad \cos\left(\vec{v}, \vec{j}\right) = \frac{v_y}{v} \qquad \cos\left(\vec{v}, \vec{k}\right) = \frac{v_z}{v}.$$

Точкой сверху здесь и в дальнейшем обозначается дифференцирование по времени

Из определения ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Проекции ускорения на оси координат равны вторым производным соответствующих координат по времени:

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

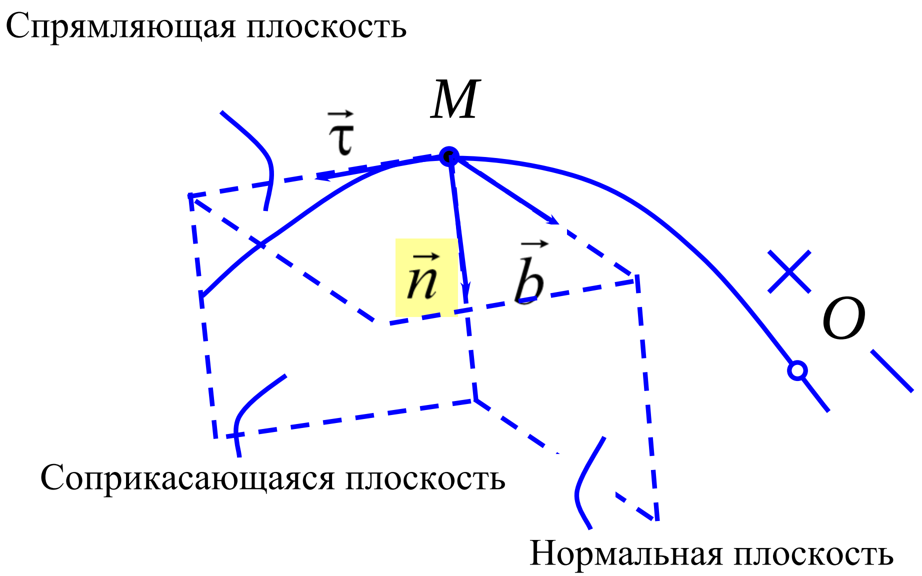
Модуль и направление ускорения определяются выражениями:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{i}\right) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\left(\vec{a}, \vec{j}\right) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\left(\vec{a}, \vec{k}\right) = \frac{a_z}{a}.$$

4 Скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения

4.1 Естественные оси.



Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения

Естественные оси (касательная, главная нормаль, бинормаль) − это оси подвижной прямоугольной системы координат с началом в движущейся точке. Их положение определяется траекторией движения. Касательная (с единичным вектором $\vec{\tau}$) направлена по касательной в положительном направлении отсчета дуговой координаты и находится как предельное положение секущей, проходящей через данную точку (рис.9). Через касательную проходит соприкасающаяся плоскость (рис. 10), которая находится как предельное положение плоскости π при стремлении точки M1 к точке M. Нормальная плоскость перпендикулярна касательной. Линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей − главная нормаль. Единичный вектор главной нормали $\vec{n}$ направлен в сторону вогнутости траектории. Бинормаль (с единичным вектором $\vec{b}$) направлена перпендикулярно касательной и главной нормали так, что орты $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ образуют правую тройку векторов. Координатные плоскости введенной подвижной системы координат (соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая) образуют естественный трехгранник, который перемещается вместе с движущейся точкой, как твердое тело. Его движение в пространстве определяется траекторией и законом изменения дуговой координаты.

Из определения скорости точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau}$, $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной.

Тогда

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}, \qquad \vec{v} = \dot{s}\vec{\tau}.$$

Алгебраическая скорость $v_\tau = \dot{s}$ – проекция вектора скорости на касательную, равная производной от дуговой координаты по времени. Если производная положительна, то точка движется в положительном направлении отсчета дуговой координаты.

Из определения ускорения

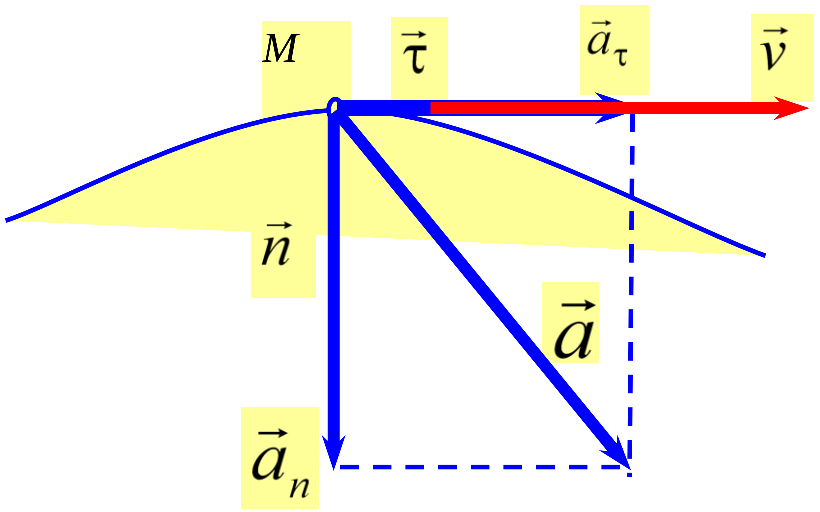
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\vec{\tau} \right) = \ddot{s}\,\vec{\tau} + \dot{s}\,\frac{d\vec{\tau}}{dt},$$

$\vec{\tau}$ – переменный по направлению вектор и

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Производная $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ определяется только видом траектории в окрестности данной точки, при этом, вводя в рассмотрение угол φ поворота касательной, имеем $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{d\vec{\tau}}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{ds} = \vec{n}k = \vec{n}\dfrac{1}{\rho}$,

где $\vec{n} = \dfrac{d\vec{\tau}}{d\varphi}$ – единичный вектор главной нормали, $k = \dfrac{d\varphi}{ds}$ – кривизна траектории, $\rho = \dfrac{1}{k}$ – радиус кривизны траектории в данной точке.

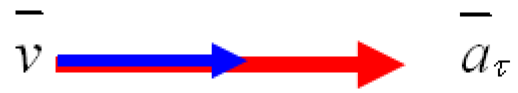


Таким образом $\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$,

т.е. вектор ускорения раскладывается на две составляющие – **касательное** и **нормальное ускорения** $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, $\vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau} = \dot{v}_\tau\vec{\tau}$, $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$,

где a_τ – алгебраическое значение касательного ускорения (проекция вектора ускорения на касательную) характеризует изменение скорости по величине; a_n – нормальное ускорение (проекция вектора ускорения на нормаль) характеризует изменение скорости по направлению. Вектор ускорения всегда лежит в соприкасающейся плоскости, проекция ускорения на бинормаль равна нулю ($a_b = 0$) .

Характер движения точки

Движение точки ***ускоренное***	Численная величина скорости возрастает $$\frac{dv}{dt} \succ 0$$	Знаки проекций векторов скорости и ускорения на касательную ***совпадают***.  $\dot{s} \succ 0; \ddot{s} \succ 0;$ или $\dot{s} \prec 0; \ddot{s} \prec 0;$
Движение точки ***замедленное***	Численная величина скорости уменьшается $$\frac{dv}{dt} \prec 0$$	Знаки проекций векторов скорости и ускорения на касательную ***НЕ совпадают***  $\dot{s} \succ 0; \ddot{s} \prec 0;$ или $\dot{s} \prec 0; \ddot{s} \succ 0;$
Движение точки ***равномерное***	Численная величина скорости не изменяется $v = const$	